Prof. Dr. Norbert Schmitz, Prof. Dr. Albrecht Irle

Modul 61314

Stochastische Prozesse

LESEPROBE

Fakultät für
Mathematik und Informatik

FernUniversität in Hagen

1 Der Begriff des stochastischen Prozesses

Ziel dieses einführenden Paragraphen ist es, anhand von Beispielen den Begriff des stochastischen Prozesses einzuführen und zu erläutern. Daraufhin geht es hier zunächst weniger um bereits exakt formulierte mathematische Problemstellungen als vielmehr um eine vorwiegend verbale Schilderung von Vorgängen, die mit Hilfe der später aufzubauenden Theorie erfasst werden sollen. Die dabei entwickelte anschauliche Vorstellung von den eingeführten mathematischen Begriffen wird im Weiteren jedoch von entscheidender Wichtigkeit sein, wenn es zum einen um das Verständnis der Beweisideen und zum anderen um die „Rückübersetzung“ der erhaltenen Resultate auf die realen Situationen geht, zu deren Untersuchung die Theorie entwickelt wurde. Trotz des zunächst geringeren Schwierigkeitsgrades sollten Sie daher den Text genau durcharbeiten und z.B. versuchen, sich zu den vorgestellten Beispielen noch weitere verwandte Phänomene zu notieren. Die Situation ist hier also ähnlich wie zu Beginn des Kurses über Wahrscheinlichkeitstheorie: Auch dort wurde zunächst im Sinne einer heuristischen Vorbetrachtung auf die außermathematischen Vorstellungen und Probleme eingegangen, zu deren Analysis dann die maßtheoretisch–abstrakte Theorie entwickelt wurde.

1.1 Einleitung

Eines der wichtigsten Ziele des Kurses WI bestand darin, **mathematische Modelle für zufallsabhängige Phänomene** (Zufallsexperimente) wie z.B. Würfelwürfe, radioaktive Zerfälle oder Lebensdauern technischer Geräte zu entwickeln und zu untersuchen. Innerhalb dieser Modelle wurden dann Aussagen wie etwa die Gesetze der großen Zahlen oder der zentrale Grenzwertsatz formuliert und bewiesen, die bei ihrer „Rückübersetzung“ in die Realität Hinweise darauf geben, mit welchen Gesetzmäßigkeiten man bei solchen Zufallsexperimenten zu rechnen hat.

Von besonderer Bedeutung war dabei stets das Konzept der **stochastisch unabhängigen Folgen identisch verteilter Zufallsvariablen** X_i mit endlichen Varianzen: Diese Folgen dienen zum einen als mathematisches Modell für Experimente, die ohne gegenseitige Beeinflussung unter gleichen Versuchsbedingungen wiederholt werden — seit altersher spielt dieser Versuchstyp vor allem bei den Laboratoriumsexperimenten der Naturwissenschaften eine herausragende Rolle. Zum anderen lassen sich für solche X_i besonders weitreichende Aussagen machen — so sind beispielsweise in diesem Fall sowohl die Voraussetzungen des schwachen Geseztes der großen Zahlen (WI 8.3.3) und des Kolmogoroff'schen starken Gesetzes der großen Zahlen (WI 8.3.8) als auch diejenigen des Satzes von Glievenko–Cantelli (WI 8.3.13) und des zentralen Grenzwertsatzes (WI 8.4.9) erfüllt, umgekehrt gibt dies auch wieder eine Erklärung dafür, warum man in den Naturwissenschaften häufig durch raffinierte Versuchsbedingungen den Fall unabhängiger Wiederholungen „desselben“ Experimentes zu erreichen versucht.

So wichtig dieses Konzept der stochastisch unabhängigen Folgen identsich verteilter Zufallsvariablen insbesondere für die Laboratoriumsexperimente der Naturwissenschaften auch ist, es reicht jedoch sicherlich bei weitem nicht aus, um bei allen zufallsabhängigen Vorgängen als mathematisches Modell dienen zu können. So wird es beispielsweise bei den meisten psychologischen Experimenten trotz geschicktesten Versuchsaufbaus nicht möglich sein, dasselbe Experiment mehrfach unabhängig zu wiederholen — die Versuchspersonen werden sich nämlich an die vorherigen Ergebnisse erinnern und damit durch die früheren Experimente beeinflusst sein.

Wir benötigen also **mathematische Modelle**, die es uns gestatten, auch derartige **Abhängigkeiten zu erfassen**. Um erste Hinweise darauf zu bekommen, was diese Modelle leisten sollten, sehen wir uns zunächst einige Beispiele an, wobei wir jedoch noch keine strenge Formalisierung vornehmen wollen.

1.2 Beispiele

1.2.1 Beispiel (Glücksspiel)

Zwei Spieler A und B spielen das folgende — zugegebenermaßen nicht besonders geistreiche — Glücksspiel:
Es wird jeweils eine „faire“ Münze (mit „Kopf“ und „Wappen“) geworfen; wenn „Kopf“ fällt, erhält A eine Mark von B, wenn „Wappen“ fällt muss A an B eine Mark bezahlen. Mit S_n werde der (möglicherweise negative) „Gewinn“ von Spieler A nach n Münzwürfen bezeichnet. Jedes S_n ist offenbar eine Zufallsvariable, welche die $n+1$ Werte $-n, -n+2, \ldots, n-2, n$ annehmen kann. In der Abbildung 1.1 sind drei typische Folgen von 200 000 solcher „Gewinnstände“ dargestellt:

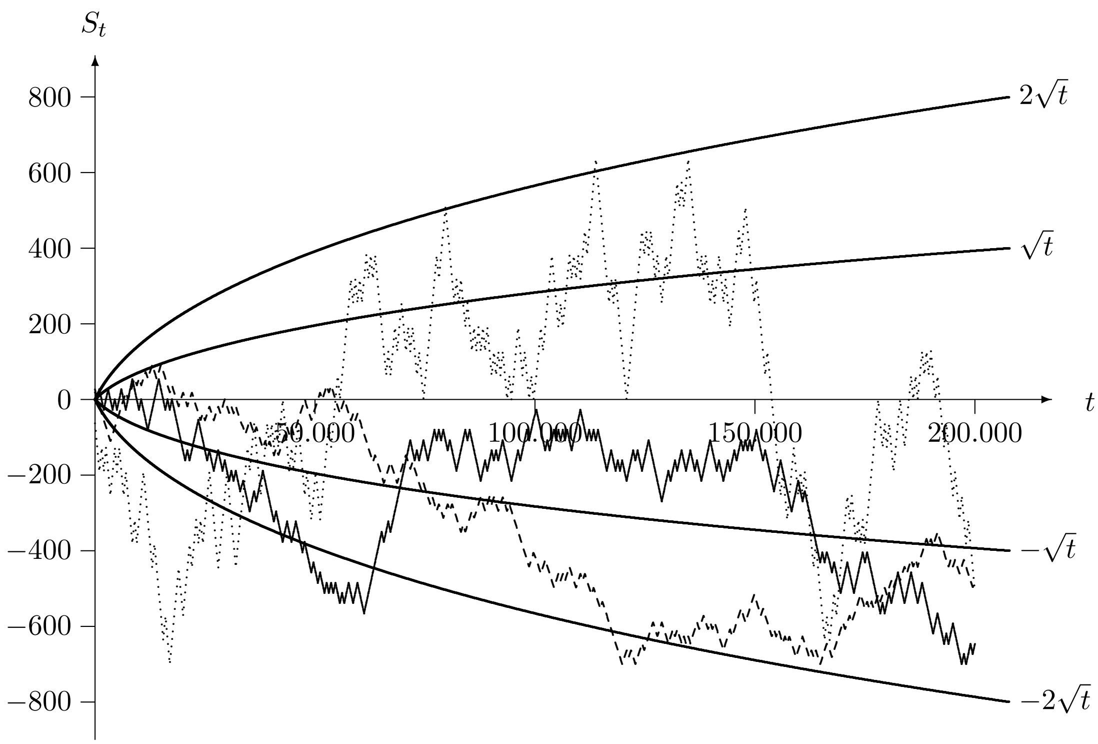

Abbildung 1.1: drei Folgen $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_{200\,000}}$
(nach WOLD: Bibliography of Time Series and Stochastic Processes, MIT–Press, Cambridge (Mass.), 1965)

Entsprechend der Definition ist S_n andererseits die Summe von n stochastisch unabhängigen Zufallsgrößen X_i mit

$$P\{X_i = 1\} \;=\; P\{X_i = -1\} \;=\; \frac{1}{2} \qquad i \in \mathbb{N}_n$$

— X_i beschreibt dabei den „Gewinn“ von Spieler A beim i–ten Münzwurf —

$$S_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} X_i\,.$$

Daher lassen sich z.B. der Erwartungswert und die Varianz von S_n sehr einfach bestimmen: Wegen

$$E(X_i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{und} \quad V(X_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

ergibt sich

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = 0 \qquad \text{(nach WI 6.1.5)}$$

und

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var } (X_i) = n \qquad \text{(nach WI 7.4.11)}\,.$$

Die S_n, $n \in \mathbb{N}$, bilden jedoch — trotz ihres Entstehens aus unabhängigen X_i — keineswegs eine stochastisch unabhängige Folge von Zufallsvariablen; es liegen vielmehr starke Abhängigkeiten vor: Wenn z.B. S_{n-1} den Wert i_{n_1} annimmt, so kommen für $S_n = S_{n-1}+X_n$ von den zunächst $n+1$ möglichen Werten nur noch $i_{n-i} - 1$ und $i_{n_1} + 1$ in Frage und diese beiden Werte ergeben sich dann mit jeweils der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Andererseits ist es dabei jedoch gleichgültig, *wie* man zu dem Wert $S_{n-1} = i_{n-1}$ gelangt ist — die weiter zurückliegenden S_i haben (bei festliegendem S_{n-1}) keinen Einfluss mehr auf S_n. Die S_n $n \in \mathbb{N}$, bilden also eine Folge von Zufallsvariablen mit einer speziellen Art von stochastischer Abhängigkeit — von der „Vergangenheit“ ist nur der jeweils unmittelbar vorhergehende Wert von Bedeutung (dies werden wir später noch exakt formulieren und behandeln; s. Paragraph 6).

1.2.2 Aufgabe

Bestimmen Sie (für festes $n \in \mathbb{N}$) die Wahrscheinlichkeitsverteilung von S_n aus Beispiel 1.2.1. ***L***

1.2.3 Beispiel (Aktienkurse)

An jedem Börsentag werden die Kurse der an der jeweiligen Börse gehandelten Aktien in einer Liste (dem Kurszettel) vermerkt. Die Kursentwicklung und somit der Kurs K_n einer bestimmten Aktie am Tage n lässt sich nicht präzise vorhersagen — sonst wäre das Aktiengeschäft sehr einfach, und es gäbe keine „Spekulationen“ — sondern hängt von vielen Zufallseinflüssen ab; die K_n wird man daher mathematisch als Zufallsvariablen beschreiben. Auch hier bilden die K_n $n \in \mathbb{N}$ keine stochastisch unabhängige Folge, sondern es liegen stochastische Abhängigkeiten vor — die Börsenausdrücke „Baisse“ und „Hausse“ für einen nach unten bzw. nach oben gerichteten Trend der Aktienkurse zeigen, dass sich die „Börsianer“ dieser (über mehrere „Zeitpunkte“ hinwegreichenden) Abhängigkeiten bewusst sind (vgl. die Abbildung 1.2).

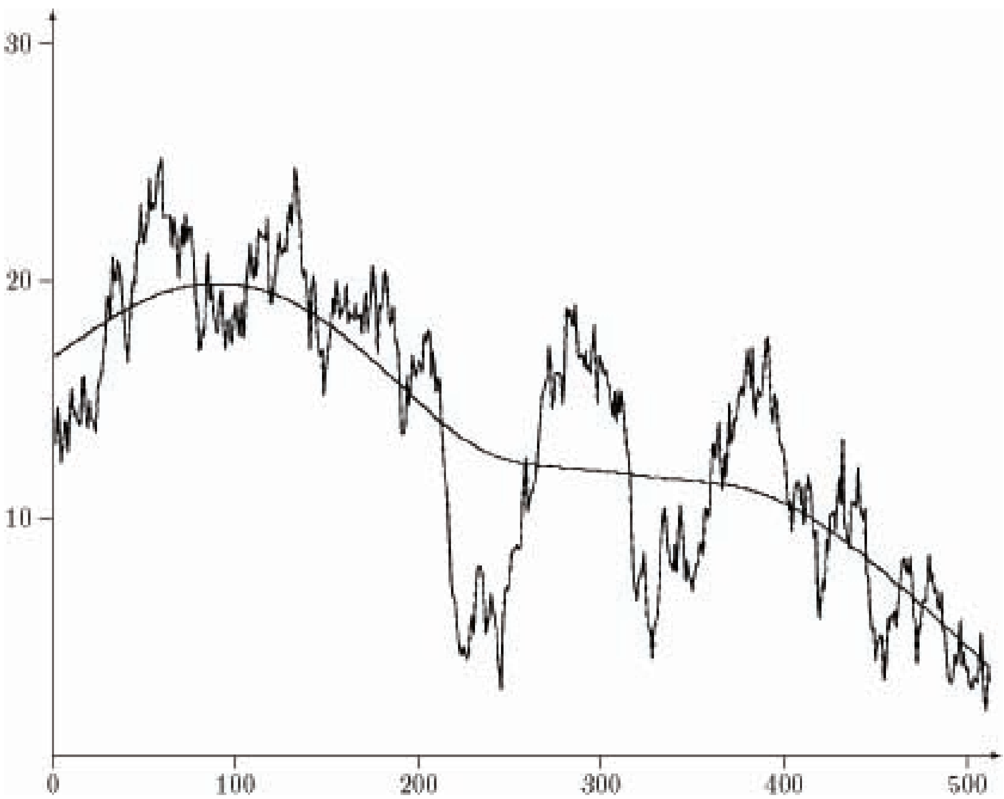

Abbildung 1.2: Beispiel eines Aktienkurses

1.2.4 Beispiel (Wasservorrat in einer Talsperre)

Jeden Tag wird am Pegel einer Talsperre gemessen, wie hoch der Wasserstand und somit der Wasservorrat in der Talsperre ist. Der witterungsbedingte Zufluss ist zufallsabhängig, ohne dass hier eine Beeinflussungsmöglichkeit besteht, und auch der Wasserverlust durch Verbrauch, Verdunstung u.s.w. unterliegt Zufallseinflüssen, wobei hier jedoch offenbar „Steuerungsmöglichkeiten" gegeben sind. Bei festgelegter „Steuerung" des Abflusses wird man also den Pegelstand H_n am Tage n als eine (bei entsprechender Idealisierung stetig verteilte) Zufallsgröße ansehen. Auch hier gibt es bei der Folge der H_n $n \in \mathbb{N}$ deutliche Abhängigkeiten:

Zum einen besitzt die Folge der H_n einen starken, durch die Jahreszeiten bedingten deterministischen Anteil (ein Absinken des Vorrates von Mai bis Oktober, gefolgt von einem Ansteigen insbesondere im Frühjahr; vgl. Abbildung 1.3), zum anderen sind plötzliche starke Veränderungen (z.B. durch wolkenbruchartige Regenfälle oder durch extreme Wasserverluste) recht „unwahrscheinlich". Bei einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Beurteilung einer speziellen „Steuerung" der Wasserabgabe wird man also diese Aspekte zu berücksichtigen haben.

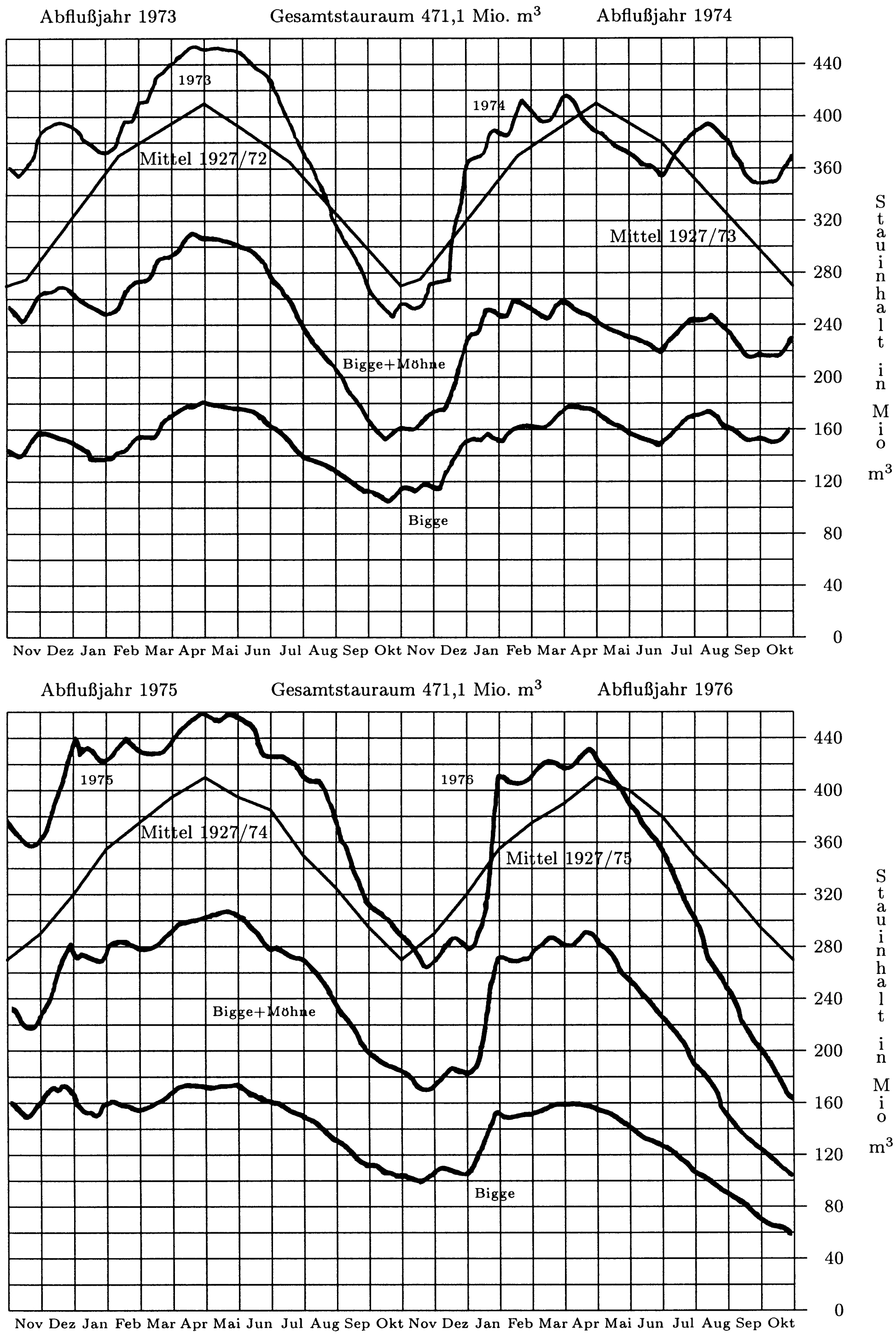

Abbildung 1.3: Stauinhaltsbewegungen der Talsperren des Ruhrtalsperrenvereins
(Talsperren insgesamt, Bigge — sowie Bigge– und Möhne–Talsperre in den Jahren 1973–1976)

1.2.5 Beispiel (Anrufe in einer Telefonzentrale)
Bei einer Telefonzentrale (z.B. der Vermittlungsstelle einer großen Behörde) treffen die Telefonanrufe so „zufällig" ein, dass man weder die Anzahl noch die Ankunftszeiten präzise vorhersagen kann. Die Anzahl X_t der vom Dienstbeginn bis zum Zeitpunkt t angekommenen Telefonate wird man also mathematisch als Zufallsvariable beschreiben. Da man auf diese Weise für jeden Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}^1_+$ eine neue Zufallsvariable erhält, reicht das Konzept der Folgen von Zufallsvariablen nicht mehr aus, wir haben vielmehr auch überabzählbare Familien von Zufallsvariablen zu betrachten — in diesem Beispiel etwa

$$(X_t)_{t \in \mathbb{R}^1_+} .$$

Auch hier müssen wir wieder starke Abhängigkeiten zwischen den verschiedenen X_t berücksichtigen: Weiss man etwa, dass bis zum Zeitpunkt t_1 bereits n_1 Anrufe eingetroffen sind, so können bis zu einem späteren Zeitpunkt $t_2 > t_1$ nicht weniger als n_1 eingetroffen sein. Zwei typische Realisierungen solcher Familien von Zufallsvariablen sind in Abbildung 1.4 dargestellt; eine Realisierung besteht also in einer Treppenfunktion, die an den (zufallsabhängigen!) Ankunftszeiten Sprünge nach oben besitzt.

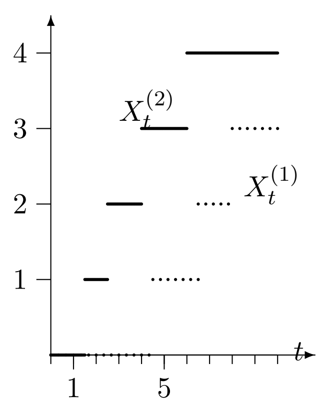

Abbildung 1.4

1.2.6 Beispiel (Brownsche Molekularbewegung)

Im Jahre 1827 entdeckte der englische Botaniker R. Brown das folgende Phänomen: Betrachtet man kleine Teilchen, die in eine Flüssigkeit suspendiert sind, unter einem starken Mikroskop, so erkennt man, dass sich die Partikel in regelloser, zitternder Bewegung befinden. Jedes einzelne Teilchen bewegt sich also auf zufallsabhängigen Pfaden in der Flüssigkeit. Dieses Phänomen (die *Brownsche Molekularbewegung*) war einer der Anstöße zur Entwicklung der kinetischen Theorie der Wärme und der statistischen Mechanik. Bezeichnet man bei einem speziellen Teilchen die Lage (in einem festen Koordinatensystem) zum Zeitpunkt t mit X_t, so haben wir es mit einer überabzählbaren Familie

$$(X_t)_{t \in \mathbb{R}^1_+}$$

von (mehrdimensionalen) Zufallsvariablen zu tun.

1.3 Einführende Begriffsbildung

Bei allen bisher angeführten Beispielen hatten wir es mit zeitlichen Entwicklungen zu tun, die vom Zufall beeinflusst werden — zu jedem „Zeitpunkt“ $n \in \mathbb{N}$ bzw. $t \in \mathbb{R}^1_+$ lag eine Zufallsvariable X_n bzw. X_t vor. Daraufhin definieren wir allgemein:

1.3.1 Definition

Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und T eine beliebige nichtleere Menge. Zu jedem $t \in T$ sei eine $(\mathcal{A} - \mathcal{B}_t)$–Zufallsvariable

$$X_t : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)$$

gegeben. Dann heißt

$$X_T := (\Omega, \mathcal{A}, P, (X_t)_{t \in T})$$

ein **allgemeiner stochastischer Prozess**[4] *mit der* **Parametermenge** T.

Über die Indexmenge T machen wir also zunächst keine besonderen Voraussetzungen; insbesondere wird man T nicht immer als „Beobachtungszeit“ interpretieren können. Da jedoch in den meisten Anwendungen $T \subset \mathbb{R}^1$ gilt, wobei $\mathbb{R}^1$ als Modell für die Zeit dient, werden wir allgemein die Elemente t von T als *Zeitpunkte* bezeichnen.

Da Messdaten in der Regel durch reelle Zahlen bzw. Vektoren beschrieben werden, sind für die Praxis vor allem solche stochastischen Prozesse von Interesse, bei denen die X_t reelle Zufallsvariable oder Zufallsvektoren sind, d.h. $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t) = (\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$ bzw. $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t) = (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k)$ gilt. Im folgenden werden wir uns daher nahezu ausschließlich mit solchen Prozessen beschäftigen.

1.3.2 Definition

Gilt für die Bildräume $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)$ eines allgemeinen stochastichen Prozesses X_T

$$(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t) = (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \qquad (t \in T),$$

so heißt X_T ein **stochastischer Prozess mit dem Zustandsraum** $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. *Für $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$ nennt man X_T auch einen* **eindimensionalen**, *für $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k)$ einen k–***dimensionalen stochastischen Prozess**.

[4] Da man in der Praxis i.a. nicht an der expliziten Angabe des W–Raumes $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, sondern nur an den durch die X_t induzierten W–Maßen P_{X_t} interessiert ist, bezeichnet man einen stochastischen Prozess häufig nur mit $(X_t)_{t \in T}$, wobei man sich $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ als geeignet gegeben vorstellt.

Bei einem stochastischen Prozess X_T mit dem Zustandsraum $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ gibt daher $X_T(\omega)$ den „Zustand" des Systems, das durch X_T beschrieben wird, zum Zeitpunkt t an. Variiert man also im Fall $T \subset \mathbb{R}^1$ bei festem $\omega \in \Omega$ die Zeitpunkte $t \in T$, so erhält man durch

$$t \longrightarrow X_t(\omega)$$

eine Abbildung von T nach $\mathcal{X}$, welche die zu ω gehörige zeitliche Entwicklung des Systems beschreibt.

1.3.3 Definition

X_T sei ein stochastischer Prozess mit dem Zustandsraum $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$; für jedes $\omega \in \Omega$ heißt dann die durch

$$t \longrightarrow X_t(\omega)$$

definierte Abbildung[5] *X^ω von T nach $\mathcal{X}$ ein* **Pfad** *des Prozesses X_T (andere gebräuchliche Bezeichnungen sind* **Trajektorie** *oder* **Realisierung** *von X_T).*

Die in Abschnitt 1.2 vorgestellten Beispiele ordnen sich recht zwanglos in den Rahmen dieser allgemeinen Begriffsbildungen ein, wobei allerdings die Angabe eines geeigneten W–Raumes $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ noch offenbleibt:

1.3.4 Beispiele

(a) Das Glücksspiel aus Beispiel 1.2.1 wird man durch den stochastischen Prozess $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit dem Zustandsraum $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ und der Parametermenge $\mathbb{N}$ beschreiben. Für den Teilprozess $\{S_n : n \in \mathbb{N}_{200\,000}\}$ sind in Abbildung 1.1 drei Pfade (Trajektorien) dargestellt.

(b) Die Aktienkurse K_n der Aktie aus Beispiel 1.2.3 bilden (für ein bestimmtes Jahr) einen stochastischen Prozess mit dem Zustandsraum

$$(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = \left(\{\frac{n}{10} : n \in \mathbb{N}^0\}, \mathcal{P}\Big(\{\frac{n}{10} : n \in \mathbb{N}^0\}\Big) \right)$$

(die Kurse werden nur bis auf 0.10 DM angegeben und negative Notierungen sind unmöglich) und der Parametermenge $T = \mathbb{N}_m$, wobei m die Anzahl der Börsentage (in dem betreffenden Jahr) bedeutet.
In Abbildung 1.2 ist die von November 1976 bis August 1977 realisierte Trajektorie der VEBA–Aktie dargestellt.

(c) Die Pegelstände H_n $n \in \mathbb{N}$ aus Beispiel 1.2.4 wird man als einen eindimensionalen stochastischen Prozess mit der Parametermenge $\mathbb{N}$ beschreiben. Abbildung 1.3 enthält die in den Jahren 1973 bis 1976 realisierten (Teil–) Trajektorien der Talsperren des Ruhrtalsperrenvereins.

[5] Da jedem $\omega \in \Omega$ eine solche Abbildung zugeordnet ist, nennt man stochastische Prozesse manchmal auch *Zufallsfunktionen*.

(d) Die Anzahl X_t, $t \in \mathbb{R}^1_+$, der bis zum Zeitpunkt t ankommenden Telefonate (Beispiel 1.2.5) bildet einen stochastischen Prozess mit dem Zustandsraum $(\mathbb{N}^0, \mathcal{P}(\mathbb{N}^0))$ und der Parametermenge $\mathbb{R}^1_+$. Die Pfade von $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^1_+}$ sind also Treppenfunktionen (vgl. Abbildung 1.4).

(e) Die Brownsche Bewegung (vgl. Beispiel 1.2.6) wird man schließlich als zwei– bzw. dreidimensionalen stochastischen Prozess mit der Parametermenge $\mathbb{R}^1_+$ beschreiben, je nachdem, ob man die Bewegung in der Ebene (Platte) oder im Raum betrachtet.

Diese wenigen Beispiele zeigen bereits, dass einige spezielle Typen von stochastischen Prozessen für die Praxis von besonderem Interesse sein werden:

1.3.5 Definition

(a) Ein stochastischer Prozess X_T mit einer Parametermenge $T \subset \mathbb{N}^0$ heißt ein stochastischer Prozess mit diskretem Parameter.

(b) Ein stochastischer Prozess X_T, bei dem die Parametermenge T ein (endliches oder unendliches) Intervall im $\mathbb{R}^1$ ist, heißt ein stochastischer Prozess mit kontinuierlichem Parameter.

In diesem Sinne ist somit jede Folge von Zufallsvariablen — beispielsweise also auch die in WI Paragraph 8 untersuchten stochastisch unabhängigen Folgen — ein spezieller stochastischer Prozess mit diskretem Parameter. Die Beispiele 1.2.5 und 1.2.6 führen andererseits auf stochastische Prozesse mit stetigem Parameter.

1.4 Überblick über den Kurs

Im folgenden wird es zunächst darum gehen, geeignete mathematische Hilfsmittel bereitzustellen, um die Existenz von stochastischen Prozessen mit vorgegebenen Eigenschaften — z.B. speziellen stochastischen Abhängigkeiten — zu sichern.

Dazu werden in Paragraph 2 zunächst *Produkte von beliebig vielen messbaren Räumen* behandelt — damit erhält man die benötigten Messräume — und dann im *Satz von Kolmogoroff* notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, dass auf dem Produktraum ein W–Maß P mit vorgegebenen endlich–dimensionalen Marginalverteilungen existiert. Dieser Satz spielt im folgenden eine entscheidende Rolle beim Nachweis der Existenz von stochastischen Prozessen mit vorgeschriebenen Eigenschaften.

Als erstes Anwendungsbeispiel wird in Paragraph 3 der *Poisson–Prozess* behandelt, der eine wichtige Rolle z.B. bei der Beschreibung und Analyse von „Zählprozessen“, wie sie etwa in 1.2.5 auftreten, von (radioaktiven) Zufallsvorgängen, von Warteschlangen in Bedienungssystemen und von technischen Erneuerungsprozessen spielt.

In Paragraph 4 wird als weiteres Anwendungsbeispiel der *Wiener–Prozess* besprochen, der unter anderem zur Beschreibung der Brownschen Molekularbewegung (vgl. Beispiel 1.2.6) dient.

Bei beiden Prozessen muß die Untersuchung von analytischen Eigenschaften (Stetigkeit, Differenzierbarkeit u.s.w.) der Pfade wegen maßtheoretischer Schwierigkeiten zunächst zurückgestellt werden.

In Paragraph 5 wird dann jedoch gezeigt, dass man diese Schwierigkeiten durch den Übergang zu äquivalenten *separablen Prozessen* umgehen kann; insbesondere für den Poisson– und den Wiener–Prozess erhält man dann Aussagen über das Verhalten der Pfade.