

Katharina Seepold

Bachelor-Arbeit

**Zur Charakterisierung von
 z -Koordinaten konvexer Polyeder im \mathbb{R}^3**

**FernUniversität in Hagen
Fakultät für Mathematik und Informatik**

Etterbeek, 4. September 2009

Betreuer: Prof. Dr. Winfried Hochstättler

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Problemstellung	1
1.2	Wissenschaftlicher Kontext	6
2	Grundbegriffe	7
2.1	Graphentheorie	7
2.2	Polyedertheorie und Lineare Optimierung	11
3	Die Matrix K	13
3.1	Erste Eigenschaften der Matrix K	13
3.2	Der Graph K_4	22
3.3	Mehrfach auftretende Ungleichungen im System $K_1 z > 0$	24
3.4	Redundante Gleichungen im System $K_0 z = 0$	31
3.5	Zeilenraum von K : Dualität der Linearen Optimierung	35
3.6	Reduzierung des Systems	37
4	Schlußbemerkungen	45
A	Berechnung von K für kleine n	46
B	Wissenschaftlicher Kontext	57
B.1	Problemstellung bei MARLIN und TOUSSAINT [9]	58
B.2	Vergleich	59
C	Knoten vom Grad 3 in triangulierten Graphen	61
C.1	Ein Algorithmus	62
C.2	Umgekehrter Algorithmus	62

Abbildungsverzeichnis

1.1	Einbettung $\Gamma(G)$ eines Graphen G und ein zugehöriges 3-Polyeder Q	2
1.2	Dreieck ABC und entartetes Dreieck $A'B'C'$	4
1.3	Konfiguration (P, T_1, T_2) und eine Realisierung Q [9]	6
2.1	Der Graph K_4	8
3.1	Vier Polyedergraphen	14
3.2	Die orientierten Flächeninhalte Δuvw addieren sich zu Null	19
3.3	An wievielen Ungleichungen ist der Knoten v beteiligt?	21
3.4	Der Graph R_{n-1}	23
3.5	Der Graph \bar{G}_n	23
3.6	$\deg w > 3$: Alle Elemente von $\Delta_1(w)$ sind paarweise verschieden	25
3.7	Der Graph G_{65} besitzt vier Knoten vom Grad 3	26
3.8	Nur einer der Knoten w_1, w_2 hat genauen Grad 3	28
3.9	Die Annahme $N(w_1) = N(w_2)$ führt auf den K_4	30
3.10	Der Graph G_{61} besitzt das fünfeckige Gebiet $ABCDE$	32
3.11	Graph G_{65} mit äußeren Knoten $v_1, v_2, v_3, v_4 = A, B, C, D$	38
3.12	Lösungsmenge des Systems $K'_{12}(G_{66}) \zeta > 0$	41
3.13	Graph R_{n-1} mit äußeren Knoten $v_1, \dots, v_{n-1} = B_2, \dots, B_n$	44
3.14	Graph \bar{G}_n mit äußeren Knoten $v_1, v_2, v_3 = A_1, A_2, B_3$	44
A.1	Nichtisomorphe Polyedergraphen mit $n \leq 6$ Knoten	46
C.1	Aus $G^0 = K_4$ durch Unterteilung hervorgegangener Graph G^2	63
C.2	$\bar{G} = G^8$, entstanden aus $G^0 = G_{63}$ durch 8-malige Unterteilung	66

Tabellenverzeichnis

3.1	Aus $E(G_{65})$ resultierende Ungleichungen	16
3.2	G_{65} – Knoten vom Grad 3 und zugehörige Ungleichungen	27
A.1	Graph G_4 und Matrix $K(G_4)$	47
A.2	Graph G_{51} und Matrix $K(G_{51})$	48
A.3	Graph G_{52} und Matrix $K(G_{52})$	49
A.4	Graph G_{61} und Matrix $K(G_{61})$	50
A.5	Graph G_{62} und Matrix $K(G_{62})$	51
A.6	Graph G_{63} und Matrix $K(G_{63})$	52
A.7	Graph G_{64} und Matrix $K(G_{64})$	53
A.8	Graph G_{65} und Matrix $K(G_{65})$	54
A.9	Graph G_{66} und Matrix $K(G_{66})$	55
A.10	Graph G_{67} und Matrix $K(G_{67})$	56
B.1	Vergleich des vorliegenden Problems mit [9]	60

1 Einleitung

In Abschnitt 1.1 dieses Kapitels stellen wir das in dieser Arbeit zu betrachtende Problem vor. Abschnitt 1.2 verweist auf den Fachartikel, in dem die im weiteren vorzustellende Methode erstmals, jedoch für ein anderes Problem, eingesetzt wurde; weitere Ausführungen zum wissenschaftlichen Kontext finden sich in Anhang B.

Das Kapitel 2 ist eine Zusammenfassung verwendeter Grundbegriffe aus der Graphentheorie und anderen Gebieten. Das Hauptkapitel dieser Arbeit ist Kapitel 3, das sich einer eingehenden Untersuchung der Koeffizientenmatrix $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_0 \end{pmatrix}$ widmet. Kapitel 4 beinhaltet abschließende Bemerkungen und offene Fragen.

Neben dem bereits erwähnten Anhang B finden sich am Ende der Arbeit die Anhänge A und C. Anhang A enthält alle Polyedergraphen mit $n \leq 6$ Knoten und die zugehörigen Matrizen K . Anhang C ist eine Weiterführung von Überlegungen aus Abschnitt 3.3.

1.1 Problemstellung

Die Ecken und Kanten eines beschränkten dreidimensionalen konvexen Polyeders Q definieren einen Graphen $G = (V, E) =: G(Q)$, den *Graphen von Q* . Variieren wir die Koordinaten der Ecken von Q unter Beibehaltung seiner Konvexität, so besitzt Q immer eine Projektion $\pi(Q) = G$ auf die xy -Ebene, so daß die Ecken von Q auf Knoten von G und die Kanten von Q auf Kanten von G abgebildet werden, und G ist ein planar eingebetteter (3-zusammenhängender) Graph mit konvexen Innengebieten ([13], [8]).

Ist umgekehrt eine planare Einbettung $\Gamma(G)$ mit konvexen Innengebieten eines planaren (3-zusammenhängenden) Graphen G vorgelegt, so kann durch Zuordnung von z -Koordinaten z_i zu den Knoten $v_i = (x_i, y_i)^T$ von $\Gamma(G)$ ein beschränktes dreidimensionales konvexes Polyeder $Q = \text{conv}(\{\bar{v}_i = (v_i, z_i)^T \mid i = 1, \dots, k\})$ realisiert werden (Abbildung 1.1).

Wir werden in der vorliegenden Arbeit zeigen, daß die Menge

$$Z := Z(G) := \{z = (z_1, z_2, \dots, z_k)^T \in \mathbb{R}^k \mid Q \text{ ist Realisierung von } G\} \quad (1.1)$$

charakterisiert werden kann durch ein lineares Ungleichungssystem. Zur Formulierung unseres Problems benötigen wir an dieser Stelle einige Definitionen. Zur Klärung weiterer verwendeter Begriffe sei verwiesen auf Kapitel 2.

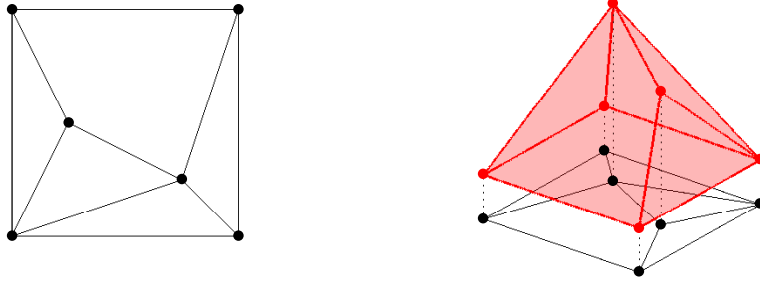


Abbildung 1.1: Einbettung $\Gamma(G)$ eines Graphen G und ein zugehöriges 3-Polyeder Q

Definition 1.1.1. (Orientierte Basen des \mathbb{R}^n .)

Seien v_1, v_2, \dots, v_n , $v_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T$, $i = 1, \dots, n$, n linear unabhängige Vektoren des \mathbb{R}^n , sei

$$A := \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

1. Das n -Tupel $\mathcal{B} := (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ist eine positiv orientierte Basis des \mathbb{R}^n , wenn $\det A > 0$;
2. \mathcal{B} ist eine negativ orientierte Basis des \mathbb{R}^n , wenn $\det A < 0$.

Der Wert $\det A$ kann interpretiert werden als das signierte Volumen des von \mathcal{B} aufgespannten n -dimensionalen Parallelepipeds.

Definition 1.1.2. (Erweiterte Koordinatenmatrix [9].)

Seien $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$, $v_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T$, $i = 0, \dots, n$, $n + 1$ Punkte des affinen Raums. Die erweiterte Koordinatenmatrix der Punkte $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ ist die Matrix

$$M = M(v_0, v_1, \dots, v_n) := \begin{pmatrix} v_0^T & 1 \\ v_1^T & 1 \\ \vdots & \vdots \\ v_n^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{01} & x_{02} & \cdots & x_{0n} & 1 \\ x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Es gilt

$$\Delta v_0 v_1 \cdots v_n := \det M = \begin{vmatrix} x_{01} & x_{02} & \cdots & x_{0n} & 1 \\ x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} x_{01} - x_{n1} & x_{02} - x_{n2} & \cdots & x_{0n} - x_{nn} & 1 \\ x_{11} - x_{n1} & x_{12} - x_{n2} & \cdots & x_{1n} - x_{nn} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1,1} - x_{n1} & x_{n-1,2} - x_{n2} & \cdots & x_{n-1,n} - x_{nn} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_{01} - x_{n1} & \cdots & x_{0n} - x_{nn} \\ x_{11} - x_{n1} & \cdots & x_{1n} - x_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n-1,1} - x_{n1} & \cdots & x_{n-1,n} - x_{nn} \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} (v_0 - v_n)^T \\ (v_1 - v_n)^T \\ \vdots \\ (v_{n-1} - v_n)^T \end{pmatrix}. \tag{1.4}
\end{aligned}$$

v_0, v_1, \dots, v_n sind also genau dann affin unabhängig, wenn $v_0 - v_n, v_1 - v_n, \dots, v_{n-1} - v_n$ linear unabhängig sind, und die Determinante $\Delta v_0 v_1 \cdots v_n$ der erweiterten Koordinatenmatrix M entspricht dem signierten Volumen des von $\mathcal{B} = (v_0 - v_n, v_1 - v_n, \dots, v_{n-1} - v_n)$ aufgespannten Parallelepipeds.

Vereinbarung. Sind die Vektoren $v_0 - v_n, v_1 - v_n, \dots, v_{n-1} - v_n$ linear abhängig, so gilt $\Delta v_0 v_1 \cdots v_n = 0$. Wir wollen in diesem Fall sagen, daß $\mathcal{M} = (v_0 - v_n, v_1 - v_n, \dots, v_{n-1} - v_n)$ ein *entartetes Parallelepiped* aufspannt.

Beispiel 1.1.3. (Die Determinante ΔABC .)

Drei Punkte $A = (x_A, y_A)^T$, $B = (x_B, y_B)^T$, $C = (x_C, y_C)^T$ der affinen Ebene sind affin unabhängig, wenn

$$\Delta ABC := \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C \\ x_B - x_C & y_B - y_C \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.5}$$

ΔABC ist der signierte Flächeninhalt des von $\mathcal{B} = (A - C, B - C)$ aufgespannten Parallelogramms (Abbildung 1.2). Gilt $\Delta ABC = 0$, so sind A, B und C affin abhängig, das heißt, je einer der drei Punkte liegt in der affinen Hülle der anderen beiden. Wir wollen in diesem Fall sagen, daß $\mathcal{M} = (A - C, B - C)$ ein *entartetes Parallelogramm* aufspannt (Abbildung 1.2).

Beispiel 1.1.4. (Die Determinante $\Delta ABCD$.)

Gegeben seien vier Punkte $A = (x_A, y_A, z_A)^T$, $B = (x_B, y_B, z_B)^T$, $C = (x_C, y_C, z_C)^T$, $D = (x_D, y_D, z_D)^T$ des affinen Raums. Diese vier Punkte sind genau dann affin unabhängig, wenn die Vektoren $A - D, B - D, C - D$ linear unabhängig sind, und in diesem Fall gilt

$$\Delta ABCD := \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.6}$$

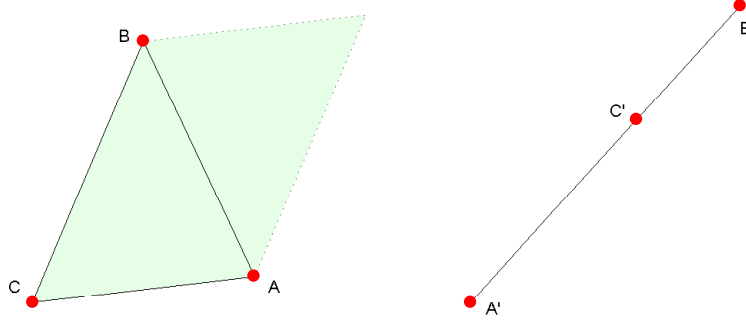


Abbildung 1.2: Dreieck ABC und von $\mathcal{B} = (A - C, B - C)$ aufgespanntes Parallelogramm (links); entartetes Dreieck $A'B'C'$ (rechts)

Es ist $\Delta ABCD > 0$ genau dann, wenn $\mathcal{B} = (A - D, B - D, C - D)$ eine positiv orientierte Basis des \mathbb{R}^3 ist, und $\Delta ABCD$ ist gerade das (positive) Volumen des von \mathcal{B} aufgespannten (dreidimensionalen) Parallelepipeds. Sind A, B, C und D affin abhängig, so gilt $\Delta ABCD = 0$. Wir sagen in diesem Fall, daß $\mathcal{M} = (A - D, B - D, C - D)$ ein *entartetes Parallelepiped* aufspannt.

Entwickeln wir die Determinante in (1.6) nach der z -Spalte, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta ABCD &= \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \end{vmatrix} = \\ & z_A \begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix} - z_B \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix} + z_C \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix} - z_D \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \\ &= z_A \Delta BCD - z_B \Delta ACD + z_C \Delta ABD - z_D \Delta ABC \\ &= (\Delta BCD \quad -\Delta ACD \quad \Delta ABD \quad -\Delta ABC) \begin{pmatrix} z_A \\ z_B \\ z_C \\ z_D \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\Delta)$$

Die Beziehung (Δ) liefert einen Zusammenhang zwischen der Eckenmenge $V(Q) = \{ \bar{v}_i = (v_i, z_i)^T \}$ von Q und der Knotenmenge $V(G) = \{ v_i = (x_i, y_i)^T \}$ des zugehörigen Polyedergraphen G : Die Koeffizienten des Vektors $(\Delta BCD, -\Delta ACD, \Delta ABD, -\Delta ABC)$ sind die Determinanten der durch je drei der vier Punkte $A, B, C, D \in V(G)$ bestimmten erweiterten Koordinatenmatrizen.

Lemma 1.1.5. (Durch eine Kante $e \in E(Q)$ bestimmte Ungleichung.)

Sei Q ein beschränktes dreidimensionales konvexes Polyeder und G ein zugehöriger Polyedergraph. Sei $E \ni e = \bar{v}_1\bar{v}_2$ eine Kante von Q , seien f, \bar{f} die beiden Facetten, die die Kante e gemeinsam haben, seien $\bar{v}_3 \in f, \bar{v}_4 \in \bar{f}$ zwei von \bar{v}_1, \bar{v}_2 verschiedene Ecken, die so bezeichnet seien, daß $\mathcal{B} = (\bar{v}_1 - \bar{v}_4, \bar{v}_2 - \bar{v}_4, \bar{v}_3 - \bar{v}_4)$ eine positiv orientierte Basis des \mathbb{R}^3 ist. Sei $V(Q) \ni \bar{v}_i = (x_i, y_i, z_i)^T, i = 1, 2, 3, 4$, und sei $V(G) \ni v_i = (x_i, y_i)^T$ der zur Ecke \bar{v}_i korrespondierende Knoten von $G(Q)$. Dann gilt

$$\Delta \bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3 \bar{v}_4 = (\Delta v_2 v_3 v_4) z_1 - (\Delta v_1 v_3 v_4) z_2 + (\Delta v_1 v_2 v_4) z_3 - (\Delta v_1 v_2 v_3) z_4 > 0. \quad (\Delta_1)$$

Beweis. Die Punkte $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$ liegen nicht in einer Ebene, denn sonst würde e in dieser Ebene liegen, wäre also keine Kante. $\Delta \bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3 \bar{v}_4 > 0$ folgt nun mit der Konstruktion und der Definition einer positiv orientierten Basis. \square

Jede Kante $e = \bar{v}_1\bar{v}_2$ von Q bestimmt also bei entsprechender Wahl von Ecken $\bar{v}_3 \in f, \bar{v}_4 \in \bar{f}$ eine oder mehrere Ungleichungen der Form (Δ_1) .

Lemma 1.1.6. (Durch vier Ecken einer Facette $f \in F(Q)$ bestimmte Gleichung.)

Sei $F \ni f$ eine Facette von Q mit mindestens vier Ecken und seien $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$ vier paarweise verschiedene, in f liegende Ecken. Sei $V(Q) \ni \bar{v}_i = (x_i, y_i, z_i)^T, i = 1, 2, 3, 4$, und sei $V(G) \ni v_i = (x_i, y_i)^T$ der zur Ecke \bar{v}_i korrespondierende Knoten von $G(Q)$. Dann gilt

$$\Delta \bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3 \bar{v}_4 = (\Delta v_2 v_3 v_4) z_1 - (\Delta v_1 v_3 v_4) z_2 + (\Delta v_1 v_2 v_4) z_3 - (\Delta v_1 v_2 v_3) z_4 = 0. \quad (\Delta_0)$$

Beweis. Die Ecken $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$ liegen in einer Ebene, sind also affin abhängig. Damit folgt $\Delta \bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3 \bar{v}_4 = 0$. \square

Je vier Ecken einer Facette von Q bestimmen also eine Gleichung der Form (Δ_0) .

Vereinbarung. Aufgrund der eindeutigen Beziehung $V(Q) \ni \bar{v} \leftrightarrow v \in V(G)$ wollen wir im folgenden, sofern keine Verwechslung auftreten kann, sowohl die Ecken von Q als auch die Knoten von G mit v (bzw. w, u, v_i, A, B u.ä.) bezeichnen.

Problemstellung

Gegeben sei eine planare Einbettung $\Gamma(G)$ mit konvexen Innengebieten eines 3-zusammenhängenden planaren Graphen G mit Knotenmenge $V(G)$ und Kantenmenge $E(G)$. Sei Q eine Realisierung von $\Gamma(G)$ mit Eckenmenge $V(Q)$ und Kantenmenge $E(Q)$, und sei $F(Q) = F_3(Q) + F_4(Q)$ die Menge der Facetten von Q , mit

$$\begin{aligned} F_3(Q) &:= \{ f \in F \mid f \text{ hat genau drei Ecken} \}, \\ F_4(Q) &:= \{ f \in F \mid f \text{ hat mindestens vier Ecken} \}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

und sei $F(G) := F_3(G) + F_4(G)$ die Menge der korrespondierenden Gebiete von G . Je vier Ecken von Q , die entsprechend Lemma 1.1.5 durch eine Kante $e \in E(Q)$ bestimmt werden, resultieren in einer Ungleichung der Form (Δ_1) . Die Koeffizienten aller

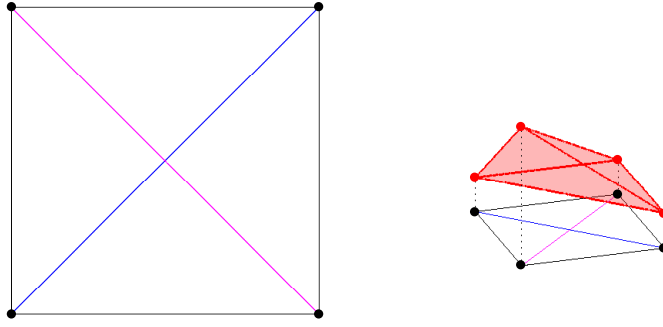


Abbildung 1.3: Konfiguration (P, T_1, T_2) und eine Realisierung Q [9]

durch die Kantenmenge $E(Q)$ bestimmten Ungleichungen fassen wir in einer Koeffizientenmatrix K_1 zusammen und erhalten so ein lineares Ungleichungssystem

$$K_1 z > 0. \tag{1.8}$$

Je vier Ecken einer Facette $f \in F_4(Q)$ bestimmen nach Lemma 1.1.6 eine Gleichung der Form (Δ_0) . Die Koeffizienten aller durch die Menge $F_4(Q)$ erhaltenen Gleichungen fassen wir in einer Koeffizientenmatrix K_0 zusammen und erhalten auf diese Weise ein homogenes lineares Gleichungssystem

$$K_0 z = 0. \tag{1.9}$$

Die Matrizen K_1 und K_0 fassen wir zusammen in der Koeffizientenmatrix $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_0 \end{pmatrix}$, und wir erhalten insgesamt das Ungleichungssystem

$$\begin{bmatrix} K_1 z > 0 \\ K_0 z = 0 \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

Eigenschaften der Matrix K sollen in der vorliegenden Arbeit untersucht werden.

1.2 Wissenschaftlicher Kontext

Die Matrix K wurde erstmals eingesetzt bei MARLIN und TOUSSAINT [9], die sich mit der Frage beschäftigen, ob eine gegebene Konfiguration (P, T_1, T_2) , bestehend aus einem streng konvexen planaren Polygon P und zwei kantendisjunkten Triangulierungen T_1 und T_2 von P eine Realisierung als konvexes Polyeder Q besitzt. (Ein einfaches Beispiel ist in Abbildung 1.3 dargestellt.) Existiert eine Realisierung Q , so besitzt Q ausschließlich dreieckige Facetten. Die Untersuchungen von [9] resultieren also in einem echten Ungleichungssystem $Kz > 0$. Eine nähere Beschreibung der Problemstellung in [9] findet sich in Anhang B, wo auch ein Vergleich mit dem uns in dieser Arbeit beschäftigenden Problem aufgestellt wird.

2 Grundbegriffe

Wir stellen in diesem Kapitel einige im weiteren benötigte Sätze und Definitionen aus der Graphentheorie, Polyedertheorie und Linearen Optimierung zusammen. Die Begriffe in Abschnitt 2.1 folgen der Terminologie von [3]; für die Begriffe in Abschnitt 2.2 haben wir [13] konsultiert. Andere Quellen sind explizit an den betreffenden Stellen genannt.

2.1 Graphentheorie

Ein (*schlichter*) Graph¹ G ist ein Paar $G = (V, E)$, V eine Menge, die Menge der *Knoten* von G , $E \subseteq \binom{V}{2}$, die Menge der *Kanten* von G .

Vereinbarung. Wir nehmen im folgenden stets an, daß die Elemente von V unterscheidbar indiziert oder numeriert seien, verzichten an dieser Stelle aber auf eine formelle Definition der Knotennumerierung und verweisen auf [12].

Gilt $e = \{u, v\}$, so schreiben wir kurz $e = uv$ ($= vu$). In diesem Fall heißen die Knoten u und v *adjazent* oder *benachbart*. Gilt $v \in e$, so sagen wir v und e sind *inzident*, oder v *inzidiert* mit e , und e *inzidiert* mit v . G heißt *endlich*, wenn V endlich ist. Im folgenden betrachten wir nur endliche Graphen. Wir setzen $n := |V|$, $m := |E|$. Die Menge

$$N(v) := \{u \in V \mid u \text{ und } v \text{ sind adjazent}\} \quad (2.1)$$

heißt *Nachbarschaft* von v . Für endliche Graphen ist der *Grad* eines Knotens v definiert als $\deg v := |N(v)|$. Für die Summe der Knotengrade gilt die Beziehung

$$\sum_{v \in V} \deg v = \sum_{i=1}^n \deg v_i = 2|E| = 2m. \quad (2.2)$$

Zwei Graphen G_1, G_2 heißen *isomorph*, und wir schreiben $G_1 \simeq G_2$, wenn eine bijektive Abbildung $I : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ existiert, für die gilt: Zwei Knoten u, v sind genau dann adjazent in G_1 , wenn ihre Bilder $I(u), I(v)$ unter I in G_2 adjazent sind. Äquivalent dazu: G_1 und G_2 sind isomorph, wenn eine inklusionserhaltende Bijektion $I : V(G_1) \cup E(G_1) \rightarrow V(G_2) \cup E(G_2)$ existiert.

Ein *Teilgraph* G' von $G = (V, E)$ ist ein Graph $G' = (V', E')$ mit $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$. Sind $G = (V, E)$, $V' \subseteq V$, so ist $G - V'$ der Teilgraph von G , der durch Löschen der

¹ In dieser Arbeit betrachten wir nur schlichte Graphen, also Graphen in der Terminologie von [3] und [12]: Es treten keine Schlingen oder Mehrfachkanten auf.

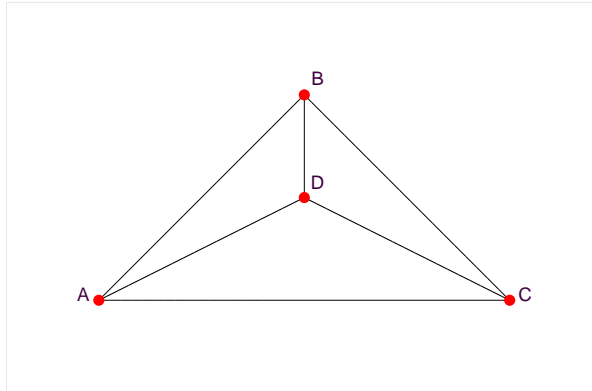


Abbildung 2.1: Der Graph K_4

Knoten $v \in V'$ und aller zu einem Knoten aus V' inzidenten Kanten entsteht. Der Graph $G + \bar{v}$ entsteht durch Hinzufügen eines Knotens \bar{v} zur Knotenmenge von G , der Graph $G + \bar{e}$ durch Hinzufügen einer Kante \bar{e} zwischen zwei nichtadjazenten Knoten.

Der Weg P_k ist der Graph $P_k = (V, E)$,

$$\begin{aligned} V &= \{v_0, v_1, \dots, v_k\}, \\ E &= \{e_1, \dots, e_k \mid e_i = v_{i-1}v_i, i = 1, \dots, k\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Die Knoten v_0 und v_k heißen *Randknoten* von P_k , alle anderen Knoten heißen *innere Knoten*. Der Kreis C_k ist der Graph $P_{k-1} + \bar{e}$, $\bar{e} = v_{k-1}v_0$.

Ein u - v -Weg in G ist ein Teilgraph von G , der ein Weg mit Randknoten u und v ist. Zwei u - v -Wege P' , P'' heißen *knotendisjunkt*, wenn $V(P') \cap V(P'') = \{u, v\}$. Ein Kreis in G ist ein Teilgraph von G , der ein Kreis ist. Wege und Kreise sind durch Angabe ihrer Knoten in der Reihenfolge des Durchlaufens eindeutig bestimmt, und wir schreiben in diesem Fall kurz $P = (v_0, \dots, v_k)$ bzw. $C = (v_1, \dots, v_k)$.

Ein Graph G heißt *zusammenhängend*, wenn für alle $u, v \in V$ ein u - v -Weg in G existiert. Ein Graph G mit mindestens $k + 1$ Knoten heißt *k -zusammenhängend*, wenn für alle $V' \subseteq V$ mit $|V'| = k - 1$ der Graph $G - V'$ zusammenhängend ist.

Es gibt bis auf Isomorphie genau einen 3-zusammenhängenden Graphen mit $n = 4$ Knoten, den vollständigen Graphen mit 4 Knoten, K_4 (Abbildung 2.1), für den gilt:

1. K_4 ist der kleinste schlichte Graph, der 3-zusammenhängend ist.
2. K_4 ist der größte vollständige Graph, der planar ist.

Die Charakterisierungen "kleinster" bzw. "größter" beziehen sich dabei jeweils auf die Knotenzahl $n = 4$.

Eine *ebene Darstellung* (oder *Zeichnung*) $\Gamma(G)$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $\Gamma : V \cup E \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Knoten $v \in V$ werden injektiv auf Punkte des \mathbb{R}^2 abgebildet.
2. Die Kanten $e \in E$ werden auf paarweise verschiedene einfache Bögen abgebildet, so daß für $E \ni e = uv$ die Randpunkte des Bogens $\Gamma(e)$ gerade den Bildern $\Gamma(u)$ bzw. $\Gamma(v)$ entsprechen.
3. Kein Bild eines Knotens befindet sich im Inneren eines einfachen Bogens:

$$\Gamma(V) \cap \mathring{\Gamma}(E) = \emptyset, \quad (2.4)$$

mit $\mathring{\Gamma}(E) := \{ \mathring{\Gamma}(e) := \Gamma(e) \setminus \{ \Gamma(u), \Gamma(v) \} \mid uv = e \in E \}$.

4. Zwei einfache Bögen $\Gamma(e), \Gamma(e')$ schneiden einander in ihrem Inneren in höchstens endlich vielen Punkten:

$$\mathring{\Gamma}(e) \cap \mathring{\Gamma}(e') = \{ x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^2 \mid k \in \mathbb{N}_0 \}. \quad (2.5)$$

Eine *geradlinige Darstellung* von G ist eine ebene Darstellung, in der die Bilder der Kanten von G Geradenabschnitte (Strecken) sind. Ist G endlich, so existiert immer eine geradlinige (aber nicht notwendigerweise überkreuzungsfreie) Darstellung von G .

Gilt $\mathring{\Gamma}(e) \cap \mathring{\Gamma}(e') = \emptyset$ für alle $e, e' \in E(G)$, so heißt $\Gamma(G)$ *planare Einbettung*. Ein Graph G , der eine planare Einbettung besitzt, heißt *planarer Graph*.

Ist G ein (endlicher) planarer Graph, und ist $\Gamma(G)$ eine planare Einbettung von G , so teilt $\Gamma(G)$ die Ebene in eine eindeutige Anzahl $p \in \mathbb{N}$ offener, paarweise disjunkter Mengen $f'_1, f'_2, \dots, f'_p \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{ \Gamma(V) \cup \Gamma(E) \} =: \{ f'_1, f'_2, \dots, f'_p \}, \quad (2.6)$$

wobei genau ein $f'_i \in \{ f'_1, f'_2, \dots, f'_p \}$ unbeschränkt ist. Sei ohne Beschränkung f'_p unbeschränkt. Die Menge

$$F(G) := \{ f_1, f_2, \dots, f_p \}, \quad f_i := \overline{f'_i}, \quad \text{der Abschluß von } f'_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad (2.7)$$

heißt die Menge der *Gebiete* von G . f_p heißt *Außengebiet* von G , die Gebiete f_1, \dots, f_{p-1} heißen *innere Gebiete* oder *Innengebiete* von G . Mit p wollen wir im folgenden die Anzahl der Gebiete von G bezeichnen: $p = |F(G)|$.

Satz 2.1.1. (EULERSche Polyederformel.)

Sei G ein (zusammenhängender und endlicher) planarer Graph, gegeben durch eine planare Einbettung $\Gamma(G)$, und seien $n = |V|$, $m = |E|$, $p = |F|$. Dann gilt:

$$n + p = m + 2. \quad (2.8)$$

Satz 2.1.2. (FARY 1948 [7].)

Jeder 3-zusammenhängende planare Graph besitzt eine geradlinige planare Einbettung.

Satz 2.1.3. (TUTTE 1960 [7].)

Jeder 3-zusammenhängende planare Graph G besitzt eine planare Einbettung, so daß alle inneren Gebiete von G konvex sind.

Ist $\Gamma(G)$ eine planare Einbettung mit konvexen Innengebieten, so nennen wir $\Gamma(G)$ *konvexe Einbettung* von G .

Satz 2.1.4. (WHITNEY 1933 [7].)

Ein 3-zusammenhängender planarer Graph G besitzt genau eine planare Einbettung $\Gamma(G)$.

Vereinbarungen

1. Ist ein Graph G durch eine planare Einbettung $\Gamma(G)$ gegeben, so bestimmt Γ ebenfalls eine Inzidenz zwischen Knoten und Gebieten sowie zwischen Kanten und Gebieten. Für $v \in V$ bzw. $e \in E$ und $f \in F$ wollen wir sagen, v bzw. e und f *inzidieren*, und wir schreiben

$$v \in f \text{ bzw. } e \in f, \quad (2.9)$$

wenn $\Gamma(v)$ bzw. $\Gamma(e)$ zum Rand von f gehört oder im Inneren von f liegt. Diese Inzidenz ist im allgemeinen keine Invariante des Graphen G , sondern abhängig von der konkreten Einbettung $\Gamma(G)$. Nach dem Satz von WHITNEY (Satz 2.1.4) ist die Inzidenz von Knoten und Gebieten bzw. Kanten und Gebieten für 3-zusammenhängende Graphen eindeutig.

2. Ferner wird durch eine planare Einbettung Γ genau ein Gebiet von G als Außengebiet ausgezeichnet. Wir sagen $v \in V(G)$ ist ein *äußerer Knoten* von G bzw. $e \in E(G)$ ist eine *äußere Kante* von G , wenn $\Gamma(v)$ bzw. $\Gamma(e)$ im Außengebiet von G (bezüglich Γ) liegt. Im gegenteiligen Fall sprechen wir von *inneren Knoten* bzw. *inneren Kanten* von G .
3. Die in dieser Arbeit betrachteten Graphen G sind stets planar und 3-zusammenhängend. Wir machen ab jetzt die Annahme, daß G gegeben ist durch eine konvexe Einbettung $\Gamma(G)$. Wir identifizieren deshalb im weiteren G und $\Gamma(G)$.

2.2 Polyedertheorie und Lineare Optimierung

Seien $a' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $a' \neq a$, $\beta \in \mathbb{R}$. Die Mengen

$$\begin{aligned} L(a', a) &:= \{ \lambda a' + (1 - \lambda) a \mid \lambda \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^n, \\ R(a', a) &:= \{ a' + \lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}^+ \} \subseteq \mathbb{R}^n, \\ [a', a] &:= \{ \lambda a' + (1 - \lambda) a \mid \lambda \in [0, 1] \} \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (2.10)$$

heißen *affine Gerade* bzw. *affine Halbgerade* bzw. *affine Strecke* [11]. Die Mengen

$$\begin{aligned} H(a, \beta) &:= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle = \beta \} \subseteq \mathbb{R}^n, \\ H^+(a, \beta) &:= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \geq \beta \} \subseteq \mathbb{R}^n, \\ H^-(a, \beta) &:= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq \beta \} \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (2.11)$$

heißen *affine Hyperebene* $H(a, \beta)$ bzw. (zu H gehöriger) *positiver abgeschlossener Halbraum* $H^+(a, \beta)$ bzw. (zu H gehöriger) *negativer abgeschlossener Halbraum* $H^-(a, \beta)$ [11].

Ein *konvexes Polyeder* P ist der Schnitt einer endlichen Menge von abgeschlossenen Halbräumen:

$$\begin{aligned} P &= \bigcap_1^k H^-(a_i, \beta_i) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b \} =: P(A, b), \\ A &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times n}, \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ein konvexes Polyeder P ist also die Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems. Die *Dimension* von P ist definiert als $\dim P := \dim(\text{aff} P)$. Ist $\dim P = k$, so nennen wir P auch *konvexes k -Polyeder*. Ein konvexes Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *eigentlich*, wenn $\dim P = n$.

Seien $P(A, b) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein konvexes Polyeder, $H(\bar{a}, \bar{\beta}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \bar{a}x = \bar{\beta} \} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\bar{\beta} \in \mathbb{R}$, eine Hyperebene. Die Ungleichung

$$\bar{a}x \leq \bar{\beta} \quad (2.13)$$

heißt für P *gültige Ungleichung*, wenn $\bar{a}x \leq \bar{\beta}$ für alle $x \in P$, wenn also $P \subseteq H^-(\bar{a}, \bar{\beta})$. Ist (2.13) eine für P gültige Ungleichung, so heißt

$$F := P \cap H = \{ x \in P \mid \bar{a}x = \bar{\beta} \} \quad (2.14)$$

Seite von P . Die leere Menge \emptyset und P selbst sind Seiten von P und werden *uneigentliche* Seiten genannt. Alle anderen Seiten heißen *eigentliche* Seiten. Eine Seite F eines

konvexen Polyeders P ist selbst wieder ein konvexes Polyeder, und $\dim F = \dim(\text{aff } F)$. Seiten von P der Dimension 0, 1 und $\dim P - 1$ heißen *Ecken*, *Kanten* bzw. *Facetten* von P . Für die Mengen der Ecken, Kanten bzw. Facetten von P schreiben wir $V(P)$, $E(P)$ bzw. $F(P)$.²

Zwei konvexe Polyeder P, Q mit $\dim P = \dim Q$ heißen *kombinatorisch äquivalent*, und wir schreiben $P \simeq Q$, wenn eine inklusionserhaltende Bijektion zwischen den Seiten von P und Q existiert.

Ein konvexes Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *beschränkt*, wenn $M \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R} \ni r > 0$ existieren mit

$$P \subseteq B(M, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - M\| \leq r\}. \quad (2.15)$$

Ist ein konvexes Polyeder P beschränkt, so ist es darstellbar als die konvexe Hülle seiner Ecken:

$$P = \text{conv}(V(P)) = \text{conv}(\{v_1, v_2, \dots, v_t\}). \quad (2.16)$$

Die konvexe Hülle von $n + 1$ affin unabhängigen Punkten v_0, v_1, \dots, v_n des \mathbb{R}^n heißt (n -dimensionales) *Simplex* T^n :

$$T^n := T^n(v_0, v_1, \dots, v_n) := \text{conv}(\{v_0, v_1, \dots, v_n\}). \quad (2.17)$$

Wir sagen auch, v_0, v_1, \dots, v_n *spannen* das Simplex $T^n(v_0, v_1, \dots, v_n)$ *auf*. In Kapitel 1 haben wir auch affin abhängige Punkte betrachtet. Sind v_0, v_1, \dots, v_n $n + 1$ affin abhängige Punkte des \mathbb{R}^n , so verschwindet die Determinante $\Delta_{v_0 v_1 \dots v_n}$ der erweiterten Koordinatenmatrix $M(v_0, v_1, \dots, v_n)$. Wir wollen in diesem Fall sagen, daß die Punkte v_0, v_1, \dots, v_n ein *entartetes Simplex* $T^n(v_0, v_1, \dots, v_n)$ aufspannen.

Das k -*Gerüst* eines konvexen l -Polyeders Q , $k \leq l$, ist die Menge seiner Seiten der Dimension $\leq k$. Das 1-Gerüst eines konvexen Polyeders Q ist also die Menge seiner Ecken und Kanten. Das 1-Gerüst von Q bestimmt einen Graphen $G(Q)$, den *Graphen von Q* [8]. Ein Graph \bar{G} heißt *Polyedergraph*, wenn \bar{G} isomorph ist zum Graphen $G(Q)$ eines beschränkten konvexen Polyeders [4].

Satz 2.2.1. (BALINSKI ([13], [8], [4]).)

Der Graph $G(Q)$ eines konvexen k -Polyeders Q , $k \geq 3$, ist k -zusammenhängend.

Satz 2.2.2. (STEINITZ ([13], [8], [4]).)

Ein Graph \bar{G} ist genau dann isomorph zum Graphen $G(Q)$ eines konvexen 3-Polyeders, wenn er planar und 3-zusammenhängend ist.

Vereinbarung. Die in dieser Arbeit betrachteten Polyeder Q sind beschränkte dreidimensionale konvexe Polyeder, und wir sagen im folgenden dafür kurz "Polyeder". Die zugehörigen Graphen $G(Q)$ sind nach dem Satz von STEINITZ (Satz 2.2.2) stets planar und 3-zusammenhängend. Wir sagen im folgenden kurz "Graph" oder "Polyedergraph".

² In dieser Arbeit betrachten wir nur konvexe 3-Polyeder. Diese haben (eigentliche) Seiten der Dimension 0, 1 und 2, dies sind gerade die Ecken, Kanten und Facetten von P .

3 Die Matrix K

Wir kommen nun zur Untersuchung der Koeffizientenmatrix K . In Abschnitt 3.1 dieses Kapitels betrachten wir, ausgehend von einem Beispiel, die Struktur der Matrix K und erhalten erste Ergebnisse hinsichtlich ihrer Zeilen, Spalten und Nichtnull-Einträge. Abschnitt 3.2 ist dem Graphen G_4 ($= K_4$) gewidmet. Dessen Realisierung ist gerade das Simplex $T^3(A, B, C, D)$, und $K(G_4)$ ist eine Matrix mit sechs identischen Zeilen. Wir geben eine geometrische Interpretation der Ungleichung

$$\Delta ABCD = z_A \Delta BCD - z_B \Delta ACD + z_C \Delta ABD - z_D \Delta ABC > 0. \quad (\Delta_1)$$

In Abschnitt 3.3 gehen wir der Frage nach, wann in K_1 mehrfach identische Zeilen auftreten. Abschnitt 3.4 untersucht mögliche Redundanz in der Matrix K_0 . Abschnitt 3.5 widmet sich der Frage, welche Aussagen mithilfe der Dualität der Linearen Optimierung über K gewonnen werden können. Abschnitt 3.6 schließlich enthält einen Ansatz, das System $\begin{bmatrix} K_1 z > 0 \\ K_0 z = 0 \end{bmatrix}$ durch zusätzliche Restriktionen und Streichen redundanter Gleichungen und Ungleichungen zu verkleinern.

3.1 Erste Eigenschaften der Matrix K

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Struktur der Matrix K . In Abbildung 3.1 sind die Graphen G_4 , G_{52} , G_{63} und G_{65} dargestellt.¹

Beispiel 3.1.1. (Die Matrix $K(G_{65})$.)

Wir demonstrieren die Ermittlung der Matrix K am Graphen $G = G_{65}$ mit

$$\begin{aligned} V(G) &= \{ A, B, C, D, E, F \}, \\ E(G) &= \{ AB, AD, AE, AF, BC, BE, CD, CF, DF, EF \}, \\ F(G) &= \{ ABCD, AEB, ADF, AFE, BEFC, CFD \}, \\ F_4(G) &= \{ ABCD, BEFC \}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Zuerst soll die Untermatrix K_1 durch Betrachtung der Kantenmenge $E(G)$ bestimmt werden. Wir betrachten die Kante $e = v_1 v_2 = AB$. Es gilt mit den Bezeichnungen aus

¹ Es existieren für $n = 4, 5, 6$ bis auf Isomorphie genau 1, 2 bzw. 7 Polyedergraphen [8]. Diese insgesamt zehn Graphen und die zugehörigen Matrizen K sind in Anhang A aufgeführt. Die in den folgenden Abschnitten als Beispiele herangezogenen Graphen sind bis auf zwei Ausnahmen (R_{n-1} , \bar{G}_n) dieser Menge entnommen.

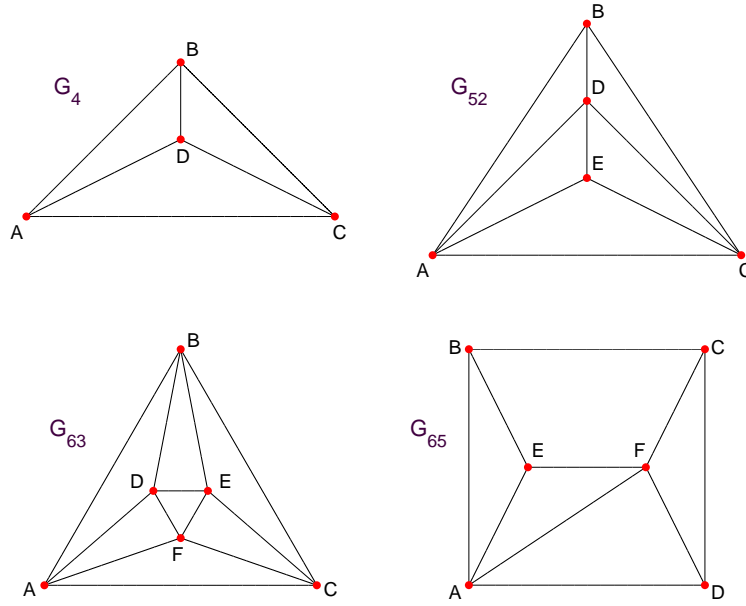


Abbildung 3.1: Vier Polyedergraphen

Lemma 1.1.5

$$\begin{aligned} f &= ABCD, \\ \bar{f} &= AEB, \end{aligned} \tag{3.2}$$

und somit $v_3 \in \{C, D\}$, $v_4 = E$, und wir erhalten die beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} \Delta ABCE &> 0, \\ \Delta ABDE &> 0. \end{aligned} \tag{(\Delta_1(AB))}$$

Entwicklung der Determinanten $\Delta ABCE$ und $\Delta ABDE$ nach der z -Spalte ergibt das Teilsystem

$$\begin{pmatrix} \Delta BCE & -\Delta ACE & \Delta ABE & 0 & -\Delta ABC & 0 \\ \Delta BDE & -\Delta ADE & 0 & \Delta ABE & -\Delta ABD & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_A \\ z_B \\ z_C \\ z_D \\ z_E \\ z_F \end{pmatrix} > 0. \tag{(\Delta_1(AB))}$$

Wir betrachten die Kante $e = v_1 v_2 = AD$. Es gilt $f = ADF$, $\bar{f} = ABCD$, $v_3 = F$, $v_4 \in \{B, C\}$, und wir erhalten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \Delta ADFB &= \Delta ABDF > 0, \\ \Delta ADFC &= \Delta ACDF > 0 \end{aligned} \tag{(\Delta_1(AD))}$$

und damit das Teilsystem

$$\begin{pmatrix} \Delta BDF & -\Delta ADF & 0 & \Delta ABF & 0 & -\Delta ABD \\ \Delta CDF & 0 & -\Delta ADF & \Delta ACF & 0 & -\Delta ACD \end{pmatrix} z > 0. \quad (\Delta_1(AD))$$

Wir fahren mit der Betrachtung der Kanten von G fort. Tabelle 3.1 faßt das Ergebnis zusammen. Somit erhalten wir das Teilsystem $K_1(G_{65}) z > 0$, mit

$$K_1(G_{65}) = \begin{pmatrix} \Delta BCE & -\Delta ACE & \Delta ABE & 0 & -\Delta ABC & 0 \\ \Delta BDE & -\Delta ADE & 0 & \Delta ABE & -\Delta ABD & 0 \\ \Delta BDF & -\Delta ADF & 0 & \Delta ABF & 0 & -\Delta ABD \\ \Delta CDF & 0 & -\Delta ADF & \Delta ACF & 0 & -\Delta ACD \\ -\Delta BEF & \Delta AEF & 0 & 0 & -\Delta ABF & \Delta ABE \\ -\Delta DEF & 0 & 0 & \Delta AEF & -\Delta ADF & \Delta ADE \\ \Delta BCE & -\Delta ACE & \Delta ABE & 0 & -\Delta ABC & 0 \\ \Delta BCF & -\Delta ACF & \Delta ABF & 0 & 0 & -\Delta ABC \\ 0 & \Delta CDE & -\Delta BDE & \Delta BCE & -\Delta BCD & 0 \\ 0 & \Delta CDF & -\Delta BDF & \Delta BCF & 0 & -\Delta BCD \\ \Delta BCE & -\Delta ACE & \Delta ABE & 0 & -\Delta ABC & 0 \\ -\Delta BEF & \Delta AEF & 0 & 0 & -\Delta ABF & \Delta ABE \\ \Delta CDF & 0 & -\Delta ADF & \Delta ACF & 0 & -\Delta ACD \\ 0 & \Delta CDF & -\Delta BDF & \Delta BCF & 0 & -\Delta BCD \\ 0 & \Delta CDF & -\Delta BDF & \Delta BCF & 0 & -\Delta BCD \\ 0 & 0 & \Delta DEF & -\Delta CEF & \Delta CDF & -\Delta CDE \\ \Delta CDF & 0 & -\Delta ADF & \Delta ACF & 0 & -\Delta ACD \\ -\Delta BEF & \Delta AEF & 0 & 0 & -\Delta ABF & \Delta ABE \\ -\Delta CEF & 0 & \Delta AEF & 0 & -\Delta ACF & \Delta ACE \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Wir ermitteln jetzt die Untermatrix K_0 . G_{65} besitzt genau zwei Gebiete mit jeweils vier Knoten. Alle anderen Gebiete des Graphen sind dreieckig. $Q(G)$ hat dementsprechend zwei Facetten mit vier Ecken und sonst nur dreieckige Facetten. Mit Lemma 1.1.6 erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta ABCD &= 0, \\ \Delta BCEF &= 0. \end{aligned} \quad (\Delta_0(F_4))$$

Entwicklung der Determinanten $\Delta ABCD$ und $\Delta BCEF$ nach der z -Spalte ergibt das Teilsystem $K_0(G_{65}) z = 0$, mit

$$K_0(G_{65}) = \begin{pmatrix} \Delta BCD & -\Delta ACD & \Delta ABD & -\Delta ABC & 0 & 0 \\ 0 & \Delta CEF & -\Delta BEF & 0 & \Delta BCF & -\Delta BCE \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

e	f	\bar{f}	v_3	v_4	Δ_1
AB	$ABCD$	AEB	C	E	$ABCE > 0$
			D	E	$ABDE > 0$
AD	ADF	$ABCD$	F	B	$ABDF > 0$
			F	C	$ACDF > 0$
			B	F	$-ABEF > 0$
AE	AEB	AFE	B	F	$-ABEF > 0$
AF	AFE	ADF	E	D	$-ADEF > 0$
BC	$ABCD$	$BEFC$	A	E	$ABCE > 0$
			A	F	$ABCF > 0$
			D	E	$BCDE > 0$
			D	F	$BCDF > 0$
			C	A	$ABCE > 0$
BE	$BEFC$	AEB	F	A	$-ABEF > 0$
			A	F	$ACDF > 0$
CD	$ABCD$	CFD	A	F	$ACDF > 0$
			B	F	$BCDF > 0$
CF	CFD	$BEFC$	D	B	$BCDF > 0$
			D	E	$CDEF > 0$
DF	ADF	CFD	A	C	$ACDF > 0$
EF	$BEFC$	AFE	B	A	$-ABEF > 0$
			C	A	$-ACEF > 0$

Tabelle 3.1: Aus $E(G_{65})$ resultierende Ungleichungen

Als Endergebnis erhalten wir die Matrix $K = K(G_{65}) = \begin{pmatrix} K_1(G_{65}) \\ K_0(G_{65}) \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}
& K(G_{65}) = \\
& \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \\ 21 \end{array} \begin{pmatrix} \Delta BCE & -\Delta ACE & \Delta ABE & 0 & -\Delta ABC & 0 \\ \Delta BDE & -\Delta ADE & 0 & \Delta ABE & -\Delta ABD & 0 \\ \Delta BDF & -\Delta ADF & 0 & \Delta ABF & 0 & -\Delta ABD \\ \Delta CDF & 0 & -\Delta ADF & \Delta ACF & 0 & -\Delta ACD \\ -\Delta BEF & \Delta AEF & 0 & 0 & -\Delta ABF & \Delta ABE \\ -\Delta DEF & 0 & 0 & \Delta AEF & -\Delta ADF & \Delta ADE \\ \Delta BCE & -\Delta ACE & \Delta ABE & 0 & -\Delta ABC & 0 \\ \Delta BCF & -\Delta ACF & \Delta ABF & 0 & 0 & -\Delta ABC \\ 0 & \Delta CDE & -\Delta BDE & \Delta BCE & -\Delta BCD & 0 \\ 0 & \Delta CDF & -\Delta BDF & \Delta BCF & 0 & -\Delta BCD \\ \Delta BCE & -\Delta ACE & \Delta ABE & 0 & -\Delta ABC & 0 \\ -\Delta BEF & \Delta AEF & 0 & 0 & -\Delta ABF & \Delta ABE \\ \Delta CDF & 0 & -\Delta ADF & \Delta ACF & 0 & -\Delta ACD \\ 0 & \Delta CDF & -\Delta BDF & \Delta BCF & 0 & -\Delta BCD \\ 0 & \Delta CDF & -\Delta BDF & \Delta BCF & 0 & -\Delta BCD \\ 0 & 0 & \Delta DEF & -\Delta CEF & \Delta CDF & -\Delta CDE \\ \Delta CDF & 0 & -\Delta ADF & \Delta ACF & 0 & -\Delta ACD \\ -\Delta BEF & \Delta AEF & 0 & 0 & -\Delta ABF & \Delta ABE \\ -\Delta CEF & 0 & \Delta AEF & 0 & -\Delta ACF & \Delta ACE \\ \Delta BCD & -\Delta ACD & \Delta ABD & -\Delta ABC & 0 & 0 \\ 0 & \Delta CEF & -\Delta BEF & 0 & \Delta BCF & -\Delta BCE \end{pmatrix}. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Analoge Betrachtungen können für die Graphen G_4 , G_{52} und G_{63} geführt werden. Für die Mengen V, E, F und F_4 dieser Graphen gilt

$$\begin{aligned}
V(G_4) &= \{ A, B, C, D \}, \\
E(G_4) &= \{ AB, AC, AD, BC, BD, CD \}, \\
F(G_4) &= \{ ABC, ADB, ACD, BDC \}, \\
F_4(G_4) &= \emptyset \Rightarrow K_0(G_4) = \emptyset;
\end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
V(G_{52}) &= \{ A, B, C, D, E \}, \\
E(G_{52}) &= \{ AB, AC, AD, AE, BC, BD, CD, CE, DE \}, \\
F(G_{52}) &= \{ ABC, ADB, ACE, AED, BDC, CDE \}, \\
F_4(G_{52}) &= \emptyset \Rightarrow K_0(G_{52}) = \emptyset;
\end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
V(G_{63}) &= \{ A, B, C, D, E, F \}, \\
E(G_{63}) &= \{ AB, AC, AD, AF, BC, BD, BE, CE, CF, DE, DF, EF \}, \\
F(G_{63}) &= \{ ABC, ADB, ACF, AFD, BEC, BDE, CEF, DFE \}, \\
F_4(G_{63}) &= \emptyset \Rightarrow K_0(G_{63}) = \emptyset.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Die Matrizen $K_1(G)$, $G = G_4, G_{52}, G_{63}$, führen wir an dieser Stelle nicht an, sondern verweisen auf Anhang **A**. Die Matrix K_0 ist für diese drei Beispielgraphen jeweils leer.

Lemma 3.1.2. (Eigenschaften der Matrix K .)

Sei G ein Polyedergraph mit $n \geq 4$ Knoten. Sei $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_0 \end{pmatrix}$ die aus der Betrachtung der Mengen $E(G)$ und $F_4(G)$ gewonnene Koeffizientenmatrix. Dann gilt:

1. K hat genau n Spalten.
2. K hat in jeder Zeile genau vier Nichtnull-Einträge.
3. Für jede Zeile $c_i = (c_{i1}, \dots, c_{in})$ von K gilt

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} = 0. \tag{3.9}$$

Beweis.

1. Die Spaltenzahl von K entspricht genau der Zeilenzahl von z , also der Anzahl der Ecken von Q , $n = |V(Q)|$.
2. Je Zeile werden jeweils genau vier Ecken von Q betrachtet, so daß genau die zu diesen Ecken korrespondierenden Elemente in K_1 bzw. K_0 von Null verschieden sind.
3. Seien $A, B, C, D \in V(G)$ die vier in einer beliebigen Zeile von K betrachteten Punkte des \mathbb{R}^2 . Mindestens drei dieser vier Punkte sind nicht kollinear. Seien diese drei Punkte so mit A, B, C bezeichnet, daß sie, zyklisch im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen, das Dreieck ABC definieren und daß der Punkt D auf einer der Positionen D_i , $i = 0, 1, 2, 3$, liegt (Abbildung **3.2**). Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Delta ABC &= \Delta BCD - \Delta ACD + \Delta ABD \\
&\Leftrightarrow 0 = \Delta BCD - \Delta ACD + \Delta ABD - \Delta ABC.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Dieses Ergebnis bleibt auch gültig bei Umindizierung, was an dieser Stelle nicht gezeigt werden soll.

□

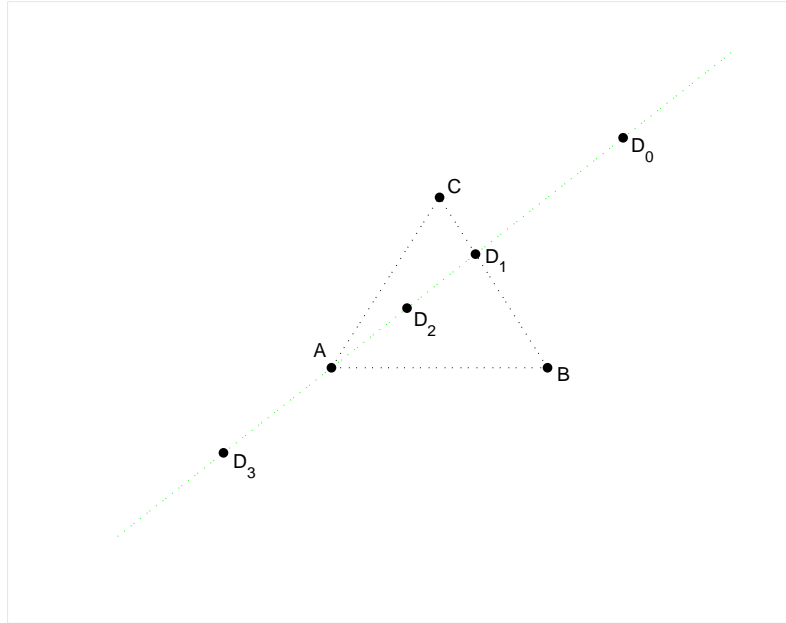


Abbildung 3.2: Die orientierten Flächeninhalte Δuvw , $u \neq v \neq w \in \{A, B, C, D\}$, addieren sich zu Null

Lemma 3.1.3. (Leere Matrix K_0 .)

K_0 ist genau dann leer, wenn Q ausschließlich dreieckige Facetten besitzt.

Beweis. Q besitze nur dreieckige Facetten. Dann existiert keine Facette mit vier oder mehr Ecken, also auch keine Gleichung

$$\Delta \bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3 \bar{v}_4 = 0. \quad (\Delta_0)$$

Sei umgekehrt K_0 leer. Dann gibt es keine vier Ecken, die auf einer Facette liegen. Da Facetten eines 3-Polyeders mindestens drei Ecken besitzen, sind alle Facetten von Q dreieckig. \square

Lemma 3.1.4. (Anzahl der Zeilen von K_0 .)

Das Polyeder Q habe genau $p_0 = |F_4(Q)|$ Facetten mit vier oder mehr Ecken. Dann besitzt K_0 mindestens p_0 Zeilen. Sind alle Facetten von Q viereckig, so besitzt K_0 genau p_0 Zeilen.

Beweis. Für jede viereckige Facette $f = \bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3 \bar{v}_4$ haben wir genau die Ecken $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$ für die Gleichung

$$\Delta \bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3 \bar{v}_4 = 0 \quad (\Delta_0)$$

zur Auswahl. Für eine Facette mit mehr als vier Ecken erhalten wir mindestens zwei Gleichungen der Form (Δ_0) . \square

Satz 3.1.5. (Eigenschaften der Matrix K_1 .)

Sei G ein Polyedergraph mit $n \geq 4$ Knoten. Sei K_1 die Untermatrix der aus der Betrachtung der Mengen $E(G)$ und $F_4(G)$ gewonnenen Koeffizientenmatrix $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_0 \end{pmatrix}$.

1. Für jede Kante e erhalten wir genau $t(e) := (k-2)(\bar{k}-2)$ Ungleichungen. Dabei sind k bzw. \bar{k} die Knotenzahlen der beiden sich in e treffenden Gebiete f und \bar{f} .
2. Die Matrix K_1 hat genau $\sum_E t(e)$ Zeilen.
3. Hat G nur dreieckige Gebiete, so besitzt K_1 genau $m = 3(n-2)$ Zeilen. In diesem Fall erhalten wir für jede Kante $e \in E(G)$ genau eine Ungleichung.

Beweis.

1. Sei $e = v_1v_2$ die Kante, in der sich die beiden Gebiete f und \bar{f} treffen. v_1 und v_2 sind sowohl Knoten von f als auch Knoten von \bar{f} . Es bleiben also noch $k-2$ Möglichkeiten, den Knoten $v_3 \in f$ zu wählen, und $\bar{k}-2$ Möglichkeiten für die Wahl des Knotens $v_4 \in \bar{f}$.
2. Wir summieren über die Eckenmenge E und verwenden **1**.
3. Für jede Kante e und die entsprechenden Gebiete f, \bar{f} gilt: $k = \bar{k} = 3$. Also enthält K_1 genau $m = |E(G)|$ Zeilen. Wir zählen an jedem Knoten die adjazenten Gebiete ab. Da jedes Gebiet genau drei Randknoten besitzt, erhalten wir

$$3p = \sum_V \deg v = 2m, \quad (3.11)$$

also $p = \frac{2}{3}m$. Mit der EULERSchen Polyederformel (2.8) ergibt dies: $m = 3(n-2)$. □

Definition 3.1.6. ($v \in V(G)$ gegenüberliegende Kanten.)

Sei $v \in V(G)$ ein Knoten eines (planar eingebetteten) Graphen G , seien $E(v)$ und $F(v)$ die Mengen der zu v inzidenten Kanten bzw. Gebiete, sei $f \in F(v)$ ein zu v inzidentes Gebiet. Sei $E(f) := \{e_1, e_2, \dots, e_r\} \subseteq E(G)$ die Menge der zu f inzidenten Kanten.

1. Genau zwei Kanten aus $E(f)$ sind inzident zu v , seien dies ohne Beschränkung die Kanten e_1, e_2 . Wir nennen die Menge

$$\bar{E}_f(v) := E(f) - \{e_1, e_2\} \quad (3.12)$$

die v bezüglich f gegenüberliegenden Kanten.

2. Wir nennen die Menge

$$\bar{E}(v) := \bigcup_{f \in F(v)} \bar{E}_f(v) \quad (3.13)$$

die v gegenüberliegenden Kanten.

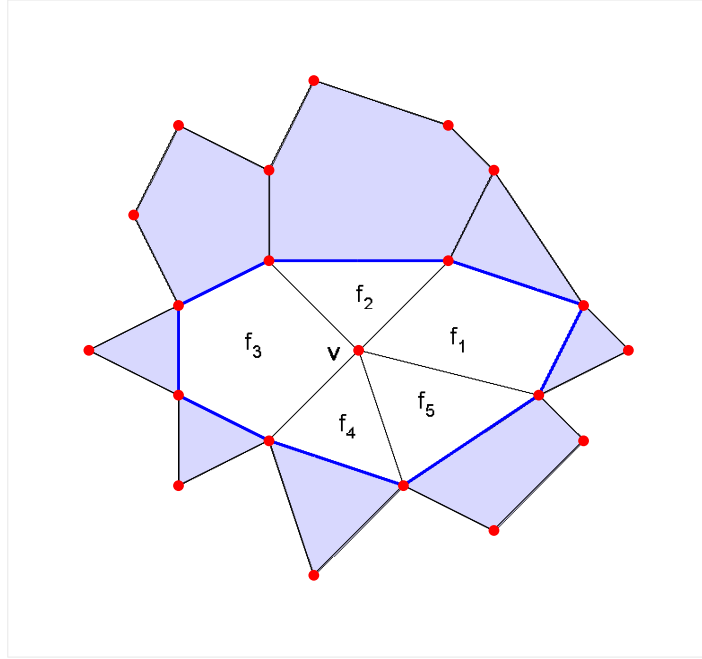


Abbildung 3.3: An wievielen Ungleichungen ist der Knoten v beteiligt?

Lemma 3.1.7. (Nichtnull-Elemente in den Spalten von K_1 .)

Der Graph G sei knotennumeriert: v_1, v_2, \dots, v_n , und die j -te Spalte von K korrespondiere zum Knoten v_j . Seien $d := \deg v_j$, $E(v_j) := \{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ die Menge der zu v_j inzidenten Kanten, $F(v_j) := \{f_1, f_2, \dots, f_d\}$ die Menge der zu v_j inzidenten Gebiete, $\bar{E}(v_j) := \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_r\}$ die Menge aller v_j gegenüberliegenden Kanten. Sei ferner $\bar{F}(v_j) := \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_r\}$ die Menge aller Gebiete, die durch ein Element aus $\bar{E}(v_j)$ von einem Element aus $F(v_j)$ getrennt werden, und seien $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_r$ die Knotenzahlen dieser Gebiete.

Der Knoten $v_j \in V(G)$ ist beteiligt an der Betrachtung von genau

$$\sum_{e \in E(v_j)} t(e) + \sum_1^r (\bar{k}_i - 2) \quad (3.14)$$

Ungleichungen der Form (Δ_1) , dies ist also die Anzahl der Nichtnull-Elemente in der j -ten Spalte von K_1 .

Beweis.

- a) Sei v ein Knoten von G vom Grad $d = \deg v$ (≥ 3). Dann ist v inzident zu genau d Kanten e_1, e_2, \dots, e_d und zu genau d Gebieten f_1, f_2, \dots, f_d . Für jede Kante

$e \in E(v)$ werden genau $t(e)$ Ungleichungen ($\Delta v_1 v_2 v_3 v_4 > 0$) mit $v \in \{v_1, v_2\}$ betrachtet. Die Menge $E(v)$ der zu v inzidenten Kanten liefert also $\sum_{e \in E(v)} t(e)$ Ungleichungen, an denen v beteiligt ist.

- b) Sei $f \in F(v)$ eines der in v aufeinandertreffenden Gebiete, und sei k die Knotenzahl dieses Gebietes. f enthält genau zwei Kanten aus der Menge $E(v)$ und genau $k - 2$ nicht zu dieser Menge gehörige Kanten $\bar{e}_3, \bar{e}_4, \dots, \bar{e}_k \in \bar{E}(v)$. Sei $\bar{e} \in \{\bar{e}_3, \bar{e}_4, \dots, \bar{e}_k\}$. \bar{e} trennt das Gebiet f von genau einem weiteren Gebiet \bar{f} . Sei \bar{k} die Eckenzahl des Gebietes \bar{f} . Für die Kante \bar{e} werden genau $\bar{k} - 2$ Ungleichungen ($\Delta v_1 v_2 v_3 v_4 > 0$) mit $v \in \{v_3, v_4\}$ betrachtet. Die Betrachtung der Menge $\bar{E}(v)$ der v gegenüberliegenden Kanten ergibt also $\sum_1^r (\bar{k}_i - 2)$ Ungleichungen, an denen v beteiligt ist.
- c) Ist $e = v_1 v_2 \notin [E(v) \cup \bar{E}(v)]$, so gilt $v \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

□

Beispiel 3.1.8. Abbildung 3.3 zeigt den Teilgraphen eines nicht weiter bestimmten Polyedergraphen G . Alle Knoten und Kanten, die keine Informationen enthalten bezüglich der Frage, an wievielen Ungleichungen der Knoten v beteiligt ist, sind weggelassen. Dargestellt sind die Mengen der zu v inzidenten Kanten $E(v)$ und Gebiete $F(v)$, die Menge $\bar{E}(v)$ (blaue Kanten) und die Menge $\bar{F}(v)$ (blau unterlegte Gebiete). v hat den Grad 5, ist also inzident zu genau fünf Kanten und fünf Gebieten, f_1, f_2, \dots, f_5 , mit jeweils $k_1 = 4, k_2 = 3, k_3 = 5, k_4 = 3, k_5 = 3$ Knoten. Ferner gilt $|\bar{E}| = 8 = |\bar{F}|$. \bar{F} enthält fünf Dreiecke, ein Viereck, ein 5-Eck und ein 6-Eck. Damit erhalten wir

$$\sum_{e \in E(v)} t(e) + \sum_1^{r=8} (\bar{k}_i - 2) = [2 + 3 + 3 + 1 + 2] + [5 + 2 + 3 + 4] = 25. \quad (3.15)$$

Der Knoten v ist also beteiligt an der Berechnung von insgesamt 25 Ungleichungen, und K_1 hat in der zu v gehörigen Spalte genau 25 Nichtnull-Elemente.

3.2 Der Graph K_4

Wir betrachten jetzt den Graphen G_4 und die zugehörige Matrix $K(G_4)$ (Tabelle A.1). G_4 ist gerade der vollständige Graph mit vier Knoten, K_4 . Das zugehörige Polyeder Q ist das Simplex $T^3(A, B, C, D)$ mit den vier Ecken A, B, C, D , so daß für jede der sechs Kanten von Q dieselbe Determinante $\Delta ABCD$ betrachtet wird. (Die Matrix K_0 ist leer, denn Q enthält nur dreieckige Facetten.) $K_1(G_4)$ enthält also sechs identische Zeilen:

$$K(G_4) = (K_1(G_4)) = \begin{pmatrix} \Delta BCD & -\Delta ACD & \Delta ABD & -\Delta ABC \\ \Delta BCD & -\Delta ACD & \Delta ABD & -\Delta ABC \\ \Delta BCD & -\Delta ACD & \Delta ABD & -\Delta ABC \\ \Delta BCD & -\Delta ACD & \Delta ABD & -\Delta ABC \\ \Delta BCD & -\Delta ACD & \Delta ABD & -\Delta ABC \\ \Delta BCD & -\Delta ACD & \Delta ABD & -\Delta ABC \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

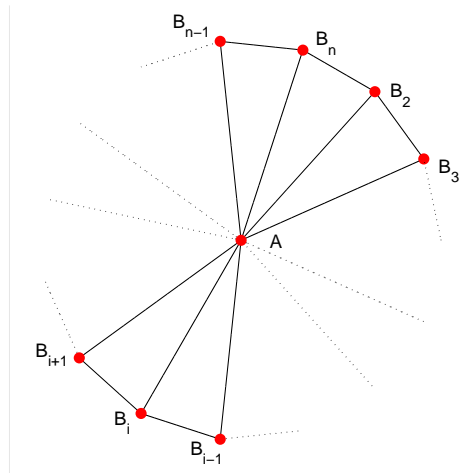


Abbildung 3.4: Der Graph R_{n-1}

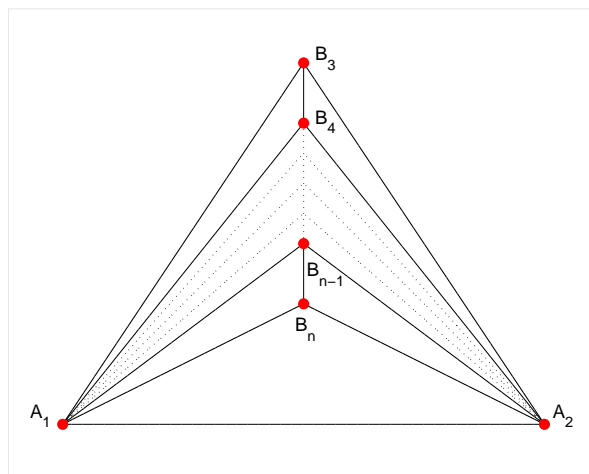


Abbildung 3.5: Der Graph \tilde{G}_n

Welche geometrische Interpretation erlaubt die Ungleichung

$$\Delta ABCD = z_A \Delta BCD - z_B \Delta ACD + z_C \Delta ABD - z_D \Delta ABC > 0? \quad (\Delta_1)$$

Für die Dreiecke ACB , ADB , ACD und BDC gilt entsprechend Lemma 3.1.2

$$\Delta ABC = \Delta BCD - \Delta ACD + \Delta ABD. \quad (3.17)$$

Wir kombinieren Ungleichung (Δ_1) und Gleichung (3.17) unter Beachtung der Vorzeichen und erhalten

$$|\Delta BCD|(z_D - z_A) + |\Delta ACD|(z_D - z_B) + |\Delta ABD|(z_D - z_C) > 0. \quad (3.18)$$

Wenn wir annehmen, daß die von den Ecken $A, B, C \in V(Q)$ aufgespannte Ebene parallel zur xy -Ebene liegt, also $z_A = z_B = z_C =: z$, so reduziert sich die Ungleichung (3.18) zu

$$z_D > z. \quad (3.19)$$

Allgemein gilt: Die Ecke des Polyeders Q , die zur Ecke D des Simplex $T^3(A, B, C, D)$ korrespondiert, liegt im positiven offenen Halbraum, der durch die von $A, B, C \in V(Q)$ aufgespannte Ebene gegeben ist.

Der Graph G_4 ist ein Vertreter des als *Rad* [12] bezeichneten Graphen $R_{n-1} = (V, E)$ (Abbildung 3.4),

$$\begin{aligned} V &= \{ A, B_2, \dots, B_n \}, \\ E &= \{ AB_i, i = 2, \dots, n, B_i B_{i+1}, i = 2, \dots, n-1, B_n B_2 \}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Das zugehörige Polyeder Q ist eine Pyramide mit $(n-1)$ -eckiger Grundfläche.

G_4 ist ebenfalls der knotenminimale Vertreter einer Gruppe von Graphen $\bar{G}_n = (V, E)$ (Abbildung 3.5),

$$\begin{aligned} V &= \{ A_1, A_2, B_3, \dots, B_n \}, \\ E &= \{ A_1 A_2, A_i B_j, i = 1, 2, j = 3, \dots, n, B_i B_{i+1}, i = 3, \dots, n-1 \}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Für $n = 4$ erhalten wir den bereits betrachteten Graphen $G_4 = K_4$ und als zugehöriges Polyeder Q eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche. Für $n = 5, 6$ erhalten wir die Graphen G_{52}, G_{62} (Tabellen A.3, A.5). $Q(G_{52})$ heißt *Bipyramide* ([13], [8]).

3.3 Mehrfach auftretende Ungleichungen im System $K_1 z > 0$

Wir kehren noch einmal zurück zu den in Abschnitt 3.1 vorgestellten Graphen $G = G_4, G_{52}, G_{63}$ und G_{65} und den zugehörigen Matrizen $K(G)$ (Tabellen A.1, A.3, A.6, A.8). Wir bemerken, daß mit Ausnahme des Graphen $G = G_{63}$ die Matrix $K_1(G)$ mehrfach identische Zeilen enthält. Von diesen vier Graphen ist G_{63} der einzige, der keinen Knoten vom Grad 3 enthält. In diesem Abschnitt werden wir einen Zusammenhang aufzeigen zwischen den Knoten von G vom Grad 3 und mehrfach auftretenden Ungleichungen im Teilsystem $K_1 z > 0$.

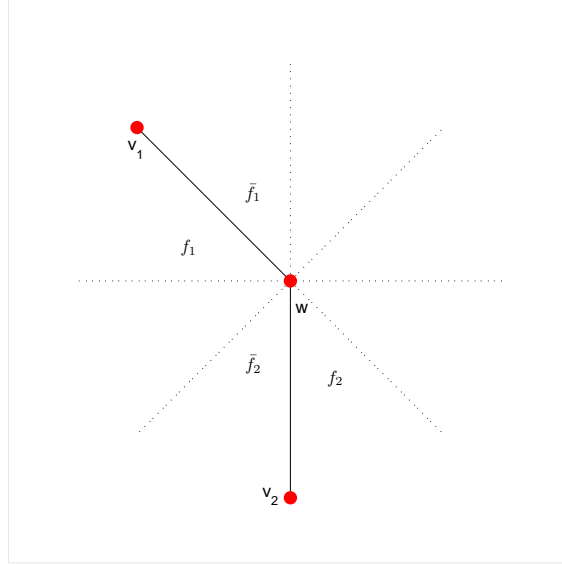


Abbildung 3.6: $\deg w > 3$: Alle Elemente von $\Delta_1(w)$ sind paarweise verschieden

Lemma 3.3.1. (Knotengrad und mehrfache identische Ungleichungen.)

1. Sei $w \in V(G)$ mit $\deg w = 3$, sei $N(w) = \{v_1, v_2, v_3\}$ die Nachbarschaft von w , und sei ohne Beschränkung $\mathcal{B} = (w - v_3, v_1 - v_3, v_2 - v_3)$ positiv orientiert. Dann tritt die Ungleichung $(\Delta wv_1v_2v_3 > 0)$ dreimal im System $K_1 z > 0$ auf, jeweils einmal je Betrachtung der Kanten wv_1, wv_2, wv_3 .
2. Sei $w \in V(G)$ mit $\deg w > 3$, $N(w) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_l\}$. Dann sind alle über $E(w) := \{wv_i \mid i = 1, \dots, l\}$ ermittelten Ungleichungen paarweise verschieden.

Beweis.

1. Sei $e = wv_1$, sei

$$\Delta_1(e) = \{(\Delta wv_1u_1u_2 > 0) \mid u_1 \in f - \{w, v_1\}, u_2 \in \bar{f} - \{w, v_1\}\} \quad (3.22)$$

die Menge aller durch Betrachtung der Kante e ermittelten Ungleichungen. Die Elemente von $\Delta_1(e)$ sind paarweise verschieden, und es gilt $(\Delta wv_1v_2v_3 > 0) \in \Delta_1(e)$. Analog betrachten wir $\Delta_1(e)$ für $e = wv_2$ bzw. $e = wv_3$ und erhalten $(\Delta wv_2v_3v_1 = \Delta wv_1v_2v_3 > 0) \in \Delta_1(wv_2)$ bzw. $(\Delta wv_3v_1v_2 = \Delta wv_1v_2v_3 > 0) \in \Delta_1(wv_3)$.

2. Sei $\Delta_1(w) := \bigcup \Delta_1(wu), u \in \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_l\}$, die Mengen der über $E(w)$ ermittelten Ungleichungen. Für ein beliebig gewähltes $u \in \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_l\}$ sind die Elemente von $\Delta_1(wu)$ paarweise verschieden. Wir nehmen jetzt an, es gäbe $u_1 \neq$

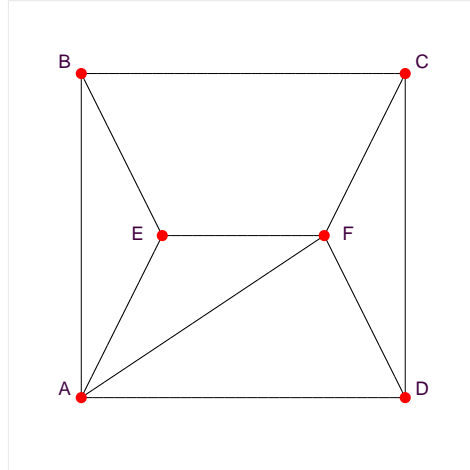


Abbildung 3.7: Der Graph G_{65} besitzt vier Knoten vom Grad 3

$u_2 \in \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_l\}$ mit $\Delta_1(wu_1) \cap \Delta_1(wu_2) \neq \emptyset$. Seien ohne Beschränkung $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$. Dann gibt es einen Knoten $u' \in V(G)$ mit

$$\Delta_1(wv_1) \ni (s\Delta_{wv_1v_2u'} > 0) \in \Delta_1(wv_2), \quad s \in \{1, -1\}. \quad (3.23)$$

Sei ohne Beschränkung $s = 1$. Seien $f_1, \bar{f}_1, f_2, \bar{f}_2$ die in wv_1 bzw. wv_2 aufeinander-treffenden Gebiete entsprechend Lemma 1.1.5 (Abbildung 3.6). Dann gilt

$$v_2 \in f_1, \bar{f}_1 \ni u' \in f_2, v_1 \in \bar{f}_2. \quad (3.24)$$

Daraus folgt, daß die Knoten w, v_1, v_2 in einem Gebiet liegen, und ebenso die Knoten w, v_2, u' bzw. w, v_1, u' , also daß $\deg w = 3$, im Widerspruch zur Voraussetzungen. Also gilt $\Delta_1(wu_1) \cap \Delta_1(wu_2) = \emptyset$.

□

Wir stellen jetzt die Frage, ob es in einem Polyedergraphen benachbarte Knoten vom Grad 3 gibt und welche Ungleichungen in einem solchen Fall resultieren. Für die folgenden Betrachtungen ist es sinnvoll, eine Unterteilung der betrachteten Graphen vorzunehmen, und zwar in solche mit ausschließlich dreieckigen Gebieten, also $(k_1, k_2, \dots, k_p) = (3, 3, \dots, 3)$ (äquivalent zu $F_4(G) = \emptyset$), und solche, die mindestens ein nicht-dreieckiges Gebiet besitzen. Graphen der ersten Gruppe heißen auch *Triangulierungen* oder *triangulierte Graphen*.

Graphen mit einem k -eckigen Gebiet ($k > 3$)

Beispiel 3.3.2. Wir ziehen noch einmal den Graphen G_{65} (Abbildung 3.7) heran als Beispiel eines Graphen mit $k_i > 3$ für ein $i \in \{1, 2, \dots, p\}$: Die Gebiete $ABCD$ und

v	$\Delta_1(v)$
B	$\Delta ABCE > 0$
C	$\Delta BCDF > 0$
D	$\Delta ACDF > 0$
E	$-\Delta ABEF > 0$

Tabelle 3.2: G_{65} – Knoten vom Grad 3 und zugehörige Ungleichungen

$BEFC$ haben jeweils vier Randknoten, alle übrigen Gebiete sind dreieckig. Die Knoten B, C, D und E haben jeweils den Grad 3, und es gibt drei Paare von adjazenten Knoten, beide vom Grad 3, nämlich (B, C) , (B, E) und (C, D) . Welche Ungleichungen werden für die Knoten B, C, D und E ermittelt? Tabelle 3.2 enthält die zu diesen Knoten gehörigen Ungleichungen. Diese im System $K_1(G_{65}) z > 0$ jeweils dreimal auftretenden Ungleichungen sind also paarweise verschieden.

Lemma 3.3.3. (Benachbarte Knoten vom Grad 3.)

Sei G ein Polyedergraph mit einem k -eckigen Gebiet ($k > 3$).

1. Enthält G Knoten vom Grad 3, so wird für jeden dieser Knoten eine andere Ungleichung betrachtet.
2. G kann benachbarte Knoten vom Grad 3 enthalten.

Beweis.

1. Seien A_1, A_2 zwei verschiedene Knoten vom Grad 3 mit jeweiliger Nachbarschaft $N(A_1) = \{B_1, C_1, D_1\}$ bzw. $N(A_2) = \{B_2, C_2, D_2\}$. Wir nehmen an, daß die für A_1 und A_2 betrachteten Ungleichungen (bis auf das Vorzeichen) identisch sind, also daß

$$\Delta A_1 B_1 C_1 D_1 = s \Delta A_2 B_2 C_2 D_2, \quad s \in \{1, -1\}. \quad (3.25)$$

Dann folgt $A_2 \in \{B_1, C_1, D_1\}$, also sind A_1 und A_2 benachbart. Sei ohne Beschränkung $A_2 = B_1$. Dann folgt ebenfalls aus (3.25)

$$\begin{aligned} B_2, C_2, D_2 &\in \{A_1, C_1, D_1\} \\ \Leftrightarrow \{B_2, C_2, D_2\} &= \{A_1, C_1, D_1\} \\ \Leftrightarrow \{A_2, B_2, C_2, D_2\} &= \{A_1, B_1, C_1, D_1\} \\ \Leftrightarrow G &= K_4, \end{aligned} \quad (3.26)$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

2. Dies ist gezeigt durch das vorangegangene Beispiel 3.3.2.

□

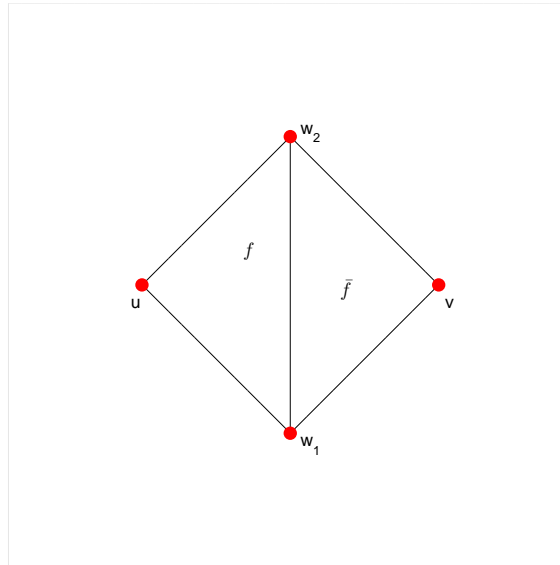


Abbildung 3.8: Nur einer der Knoten w_1, w_2 hat genauen Grad 3

Triangulierungen

Beispiel 3.3.4. (Der Graph G_4 .)

Wir haben in Abschnitt 3.2 gesehen, daß im Falle des Graphen $G_4 (= K_4)$ (Abbildung 2.1) für jede Kante $e \in E(G_4)$ dieselbe Ungleichung ($\Delta ABCD > 0$) ermittelt wird, und es gilt $Q = T^3(A, B, C, D)$. Daher hat $K_1(G_4)z > 0$ sechs identische Zeilen. Wir werden sehen, daß $K_1(G_4)$ die einzige Matrix mit sechs identischen Zeilen ist.

Satz 3.3.5. (Triangulierte Graphen und Knoten vom Grad 3.)²

Sei G ein triangulierter Graph, w ein Knoten von G vom genauen Grad 3 mit Nachbarschaft $N(w) = \{v_1, v_2, v_3\}$. Dann gilt genau eine der folgenden zwei Alternativen:

1. $G = K_4$, und (dazu äquivalent) $\deg v_1 = \deg v_2 = \deg v_3 = 3$;
2. $\deg v \geq 4$, $v \in N(w)$.

Beweis. Sei $G \neq K_4$ eine Triangulierung und seien $w_1 \neq w_2 \in V(G)$ zwei Knoten vom Grad 3. Wir nehmen an, daß w_1, w_2 benachbart seien. Seien f, \bar{f} die beiden Gebiete, die in der Kante $e = w_1w_2$ aufeinanderstoßen. Da G eine Triangulierung ist, gibt es genau zwei

² Das Ergebnis von Satz 3.3.5 liefert eine Abschätzung der maximalen Zahl von Grad-3-Knoten in einem triangulierten Graphen und ebenfalls eine Methode, wie ein 3-zusammenhängender Graph durch Entfernen bestimmter Knoten vom Grad 3 "verkleinert" werden kann. Diese Überlegungen werden in Anhang C weitergeführt.

Knoten $u \neq v \in V(G) - \{w_1, w_2\}$ mit $f = w_1w_2u$, $\bar{f} = w_2w_1v$ (Abbildung 3.8). Daraus erhalten wir die Facetten $f' = uvw_1$, $f'' = vw_2u \in F(Q)$ und die Kante $e' = uv \in E(Q)$, also $Q = T^3(w_1, w_2, u, v)$ und $G = K_4$, im Widerspruch zur Annahme. \square

Korollar 3.3.6. *Ein 3-zusammenhängender planarer Graph mit $n \geq 5$ Knoten und zwei adjazenten Knoten, beide vom Grad 3, besitzt mindestens ein Gebiet mit mehr als drei Knoten.*

Satz 3.3.7. (Mehrfache Ungleichungen im System $K_1 z > 0$.)

Sei G ein 3-zusammenhängender planarer Graph, und sei $\delta_1 := (\Delta v_1v_2v_3v_4 > 0)$ eine im System $K_1 z > 0$ enthaltene Ungleichung.

1. Ist $G = K_4$, so gilt $Q = T^3(v_1, v_2, v_3, v_4)$, δ_1 wird genau sechsmal ermittelt, und $K_1(G)$ besteht aus sechs identischen Zeilen.
2. Gilt $G \neq K_4$, so wird δ_1 genau dann mehrmals ermittelt, wenn $w \in \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ein Knoten vom Grad 3 ist, und $N(w) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} - w =: \{w_1, w_2, w_3\}$. Genauer gilt: Die Ungleichung $(s\Delta w_1w_2w_3 > 0) =: \delta_1^{(3)}(w)$, $s \in \{-1, 1\}$, wird genau dreimal betrachtet, jeweils einmal für jede der drei zu w inzidenten Kanten.
3. Gilt $G \neq K_4$, und sind w_1, w_2 zwei adjazente Knoten, beide vom Grad 3, so gilt
 - a) $|N(w_1) \cap N(w_2)| \leq 1$,
 - b) $\delta_1^{(3)}(w_1) \neq \delta_1^{(3)}(w_2)$.

Beweis.

1. Dies folgt aus den Betrachtungen in Abschnitt 3.2.
2. Dies folgt mit Lemma 3.3.1 und Lemma 3.3.3.
3. a) Seien w_1, w_2 adjazent, beide vom Grad 3. Dann gilt

$$|N'| := |N(w_1) \cap N(w_2)| \leq 2. \quad (3.27)$$

G_{65} ($w_1 = B, w_2 = E$) und G_{64} ($w_1 = E, w_2 = F$) (Tabellen A.8, A.7) sind Beispielgraphen mit $|N'| = 1$ bzw. $|N'| = 0$. Es ist nun noch $|N'| \neq 2$ zu zeigen. Wir nehmen dafür an, daß

$$\begin{aligned} N(w_1) &= \{w_2, u, v\}, \\ N(w_2) &= \{w_1, u, v\}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Dann gibt es Gebiete $f', f'' \in F(G)$ mit

$$\begin{aligned} w_1, u, v &\in f', \\ w_2, u, v &\in f''. \end{aligned} \quad (3.29)$$

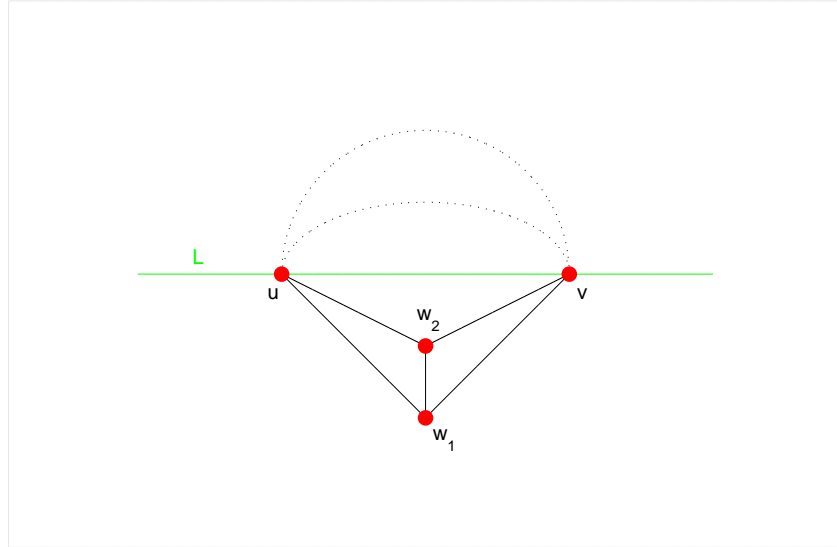


Abbildung 3.9: Die Annahme $N(w_1) = N(w_2)$ führt auf den K_4

Wir wählen eine Einbettung $\Gamma(G)$ von G , so daß w_1, u, v äußere Knoten sind, das heißt, $\Gamma(f')$ ist das Komplement des Außengebietes von G in der Darstellung $\Gamma(G)$ (Abbildung 3.9). Ferner können wir für die zu den Knoten $w \in V(G)$ korrespondierenden Ecken $\bar{w} \in V(Q)$ $z_{\bar{w}} = 0$ annehmen, wenn w ein äußerer Knoten von G ist, sonst $z_{\bar{w}} > 0$, also insbesondere

$$\begin{aligned} z_{\bar{w}_1} &= z_{\bar{u}} = z_{\bar{v}} = 0, \\ z_{\bar{w}_2} &= \alpha > 0. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Sei $w_0 \in f''$ ein von w_2, u, v verschiedener Knoten des Gebietes f'' . Liegt $\Gamma(w_0)$ im Inneren des von w_2, u, v bestimmten Dreiecks, so ist f'' nicht konvex. Liegt $\Gamma(w_0)$ in derjenigen der beiden von $L := u + \mathbb{R}v$ bestimmten Halbebenen, in der w_2 nicht liegt, so gilt $z_{\bar{w}_0} < 0$. In beiden Fällen erhalten wir einen Widerspruch. Daraus folgt $e' = uv \in E(G)$ und damit $G = K_4$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

- b) Dies folgt ebenfalls mit Lemma 3.3.3.

□

Korollar 3.3.8. (Graph ohne Knoten vom Grad 3.)

Enthält der Polyedergraph G keinen Knoten vom Grad 3, so wird im Teilsystem K_1 $z > 0$ keine Ungleichung mehrfach ermittelt.

Beispiel 3.3.9. Wir betrachten den Graphen $G = R_{n-1}$ ((3.20), Abbildung 3.4). Für die Kanten AB_i wird jeweils genau eine Ungleichung $\Delta_1(AB_i)$ ermittelt, und zwar

$$\Delta_1(AB_i) = \begin{cases} (\Delta AB_2 B_n B_3 > 0), & i = 2, \\ (\Delta AB_i B_{i-1} B_{i+1} > 0), & i = 3, \dots, n-1, \\ (\Delta AB_n B_{n-1} B_2 > 0), & i = n. \end{cases} \quad (3.31)$$

Diese Ungleichung wird auch jeweils einmal ermittelt für die Kanten $B_n B_2$ und $B_2 B_3$ bzw. $B_{i-1} B_i$ und $B_i B_{i+1}$, $i = 3, \dots, n-1$, bzw. $B_{n-1} B_n$ und $B_n B_2$. Für $B_i B_{i+1}$, $i = 2, \dots, n-1$, erhalten wir die Ungleichungen $(\Delta B_i B_{i+1} B_k A > 0)$, $k \in \{2, \dots, n\} - \{i, i+1\}$; für $B_n B_2$ die Ungleichungen $(\Delta B_n B_2 B_k A > 0)$, $k \in \{3, \dots, n-1\}$. Dies sind jeweils $n-3$ Ungleichungen. Damit erhalten wir:

1. $K_1(R_{n-1})$ ist von der Ordnung $[(n-2)(n-1)] \times n$.³
2. Das System $K_1(R_{n-1})z > 0$ enthält genau $(n-4)(n-1)$ paarweise verschiedene Ungleichungen.

3.4 Redundante Gleichungen im System $K_0 z = 0$

Wir wenden uns noch einmal der Untermatrix K_0 zu und betrachten dafür als Beispiel den Graphen G_{61} und die Matrix $K_0(G_{61})$ (Abbildung 3.10, Tabelle A.4). Es gilt

$$F_4(G_{61}) = \{ABCDE\}, \quad (3.32)$$

das heißt, G_{61} enthält als einziges Gebiet mit mehr als drei Knoten das fünfeckige Gebiet $f = ABCDE$. Wir können je vier von $k(f) := 5$ Knoten auswählen und erhalten auf diese Weise die $\binom{5}{4} = 5$ Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 \quad & \Delta ABCD = 0, \\ 2 \quad & \Delta ABCE = 0, \\ 3 \quad & \Delta ABDE = 0, \\ 4 \quad & \Delta ACDE = 0, \\ 5 \quad & \Delta BCDE = 0. \end{aligned} \quad (\Delta_0(f))$$

Lemma 3.4.1. (Redundante Gleichungen in $K_0(G_{61})$.)

Die Zeilen 3 – 5 der Matrix $K_0(G_{61}) =$

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left(\begin{array}{cccccc} \Delta BCD & -\Delta ACD & \Delta ABD & -\Delta ABC & 0 & 0 \\ \Delta BCE & -\Delta ACE & \Delta ABE & 0 & -\Delta ABC & 0 \\ \Delta BDE & -\Delta ADE & 0 & \Delta ABE & -\Delta ABD & 0 \\ \Delta CDE & 0 & -\Delta ADE & \Delta ACE & -\Delta ACD & 0 \\ 0 & \Delta CDE & -\Delta BDE & \Delta BCE & -\Delta BCD & 0 \end{array} \right) \quad (3.33)$$

³ Die Matrix $K_0(R_{n-1})$ ist von der Ordnung $\binom{n-1}{4} \times n$. Die Untermatrix K_0 von K wird im folgenden Abschnitt untersucht.

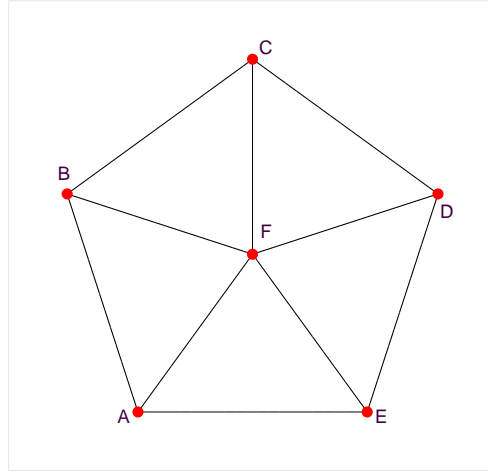


Abbildung 3.10: Der Graph G_{61} besitzt das fünfeckige Gebiet $ABCDE$

sind redundant, das heißt, $K_0(G_{61})$ kann ersetzt werden durch die Matrix $K'_0(G_{61}) =$

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \Delta BCD & -\Delta ACD & \Delta ABD & -\Delta ABC & 0 & 0 \\ \Delta BCE & -\Delta ACE & \Delta ABE & 0 & -\Delta ABC & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Beweis. Die beiden Zeilen von $K'_0(G_{61}) =: K'_0$ sind äquivalent zu den Zeilen 1 und 2 von $(\Delta_0(f))$ und damit äquivalent zu

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_v & y_v & z_v & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad v = D, E, \quad (3.35)$$

äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} D \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_A^D \begin{pmatrix} A \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_B^D \begin{pmatrix} B \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_C^D \begin{pmatrix} C \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

$$\begin{pmatrix} E \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_A^E \begin{pmatrix} A \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_B^E \begin{pmatrix} B \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_C^E \begin{pmatrix} C \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\alpha_i^j \in \mathbb{R}$, $i = A, B, C$, $j = D, E$. Damit ergibt sich für die Determinante $\Delta ABDE$ der erweiterten Koordinatenmatrix der Punkte A, B, D, E :

$$\Delta ABDE = \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \\ x_E & y_E & z_E & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ \sum_{i=A,B,C} \alpha_i^D x_i & \sum_{i=A,B,C} \alpha_i^D y_i & \sum_{i=A,B,C} \alpha_i^D z_i & \alpha_A^D + \alpha_B^D + \alpha_C^D \\ \sum_{i=A,B,C} \alpha_i^E x_i & \sum_{i=A,B,C} \alpha_i^E y_i & \sum_{i=A,B,C} \alpha_i^E z_i & \alpha_A^E + \alpha_B^E + \alpha_C^E \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ \alpha_C^D x_C & \alpha_C^D y_C & \alpha_C^D z_C & \alpha_C^D \\ \alpha_C^E x_C & \alpha_C^E y_C & \alpha_C^E z_C & \alpha_C^E \end{vmatrix} = 0. \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Entsprechende Umformungen für die Determinanten $\Delta ACDE$, $\Delta BCDE$ ergeben

$$\begin{aligned}
\Delta ACDE &= 0, \\
\Delta BCDE &= 0, \tag{3.38}
\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Satz 3.4.2. (Nichtredundante Matrix $K'_0(f)$.)

Sei $f = v_1 v_2 v_3 \cdots v_l$ ein l -eckiges Gebiet von G , $l \geq 4$, seien

$$\begin{aligned}
&1 && \Delta v_1 v_2 v_3 v_4 = 0, \\
&2 && \Delta v_1 v_2 v_3 v_5 = 0, \\
&\vdots && \vdots \quad \vdots \\
&l-3 && \Delta v_1 v_2 v_3 v_l = 0, \\
&l-2 && \Delta v_1 v_2 v_4 v_5 = 0, \\
&\vdots && \vdots \quad \vdots \\
&2l-7 && \Delta v_1 v_2 v_4 v_l = 0, \\
&\vdots && \vdots \quad \vdots \\
&\binom{l}{4} && \Delta v_{l-3} v_{l-2} v_{l-1} v_l = 0,
\end{aligned} \tag{\Delta_0(f)}$$

die $\binom{l}{4}$ aus der Betrachtung der Knoten von f resultierenden Gleichungen.

1. $l-3$ Gleichungen der Form (Δ_0) sind notwendig und hinreichend, um die affine Abhängigkeit der Punkte $v_1, v_2, v_3, \dots, v_l \in V(Q)$ zu charakterisieren.
2. Das System $[\Delta v_1 v_2 v_3 u = 0]$, $u = v_4, \dots, v_l$, ist ein mögliches notwendiges und hinreichendes System zur Charakterisierung der affinen Abhängigkeit der Punkte $v_1, v_2, v_3, \dots, v_l \in V(Q)$.

Beweis.

1. Sind $l_0 \leq l - 4$ Gleichungen gegeben, so existiert mindestens eine Ecke $v \in \{v_1, \dots, v_l\} \in V(Q)$, die in keiner der l_0 Gleichungen auftritt. Also benötigen wir mindestens $l - 3$ Gleichungen. Daß $l - 3$ Gleichungen hinreichend sind, folgt aus dem speziellen System in **2**.
2. Keine der $l - 3$ Zeilen der Matrix $K'_0 =$

$$\begin{pmatrix} \Delta v_2 v_3 v_4 & -\Delta v_1 v_3 v_4 & \Delta v_1 v_2 v_4 & -\Delta v_1 v_2 v_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \Delta v_2 v_3 v_5 & -\Delta v_1 v_3 v_5 & \Delta v_1 v_2 v_5 & 0 & -\Delta v_1 v_2 v_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta v_2 v_3 v_l & -\Delta v_1 v_3 v_l & \Delta v_1 v_2 v_l & 0 & 0 & \cdots & -\Delta v_1 v_2 v_3 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

ist redundant. Also ist das System $[\Delta v_1 v_2 v_3 u = 0]$, $u = v_4, \dots, v_l$, notwendig. Es ist auch hinreichend, denn für vier Punkte $u, v, w, q \in \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_l\} \subseteq V(Q)$, $v_i = (x_i, y_i, z_i)^T$, $i = 1, 2, 3, \dots, l$, und $\alpha_i^j \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, $j = u, v, w, q$, gilt:

$$\begin{aligned} \Delta uvwq &= \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u & 1 \\ x_v & y_v & z_v & 1 \\ x_w & y_w & z_w & 1 \\ x_q & y_q & z_q & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^u x_i & \sum_{i=1}^3 \alpha_i^u y_i & \sum_{i=1}^3 \alpha_i^u z_i & \sum_{i=1}^3 \alpha_i^u \\ \sum_{i=1}^3 \alpha_i^v x_i & \sum_{i=1}^3 \alpha_i^v y_i & \sum_{i=1}^3 \alpha_i^v z_i & \sum_{i=1}^3 \alpha_i^v \\ \sum_{i=1}^3 \alpha_i^w x_i & \sum_{i=1}^3 \alpha_i^w y_i & \sum_{i=1}^3 \alpha_i^w z_i & \sum_{i=1}^3 \alpha_i^w \\ \sum_{i=1}^3 \alpha_i^q x_i & \sum_{i=1}^3 \alpha_i^q y_i & \sum_{i=1}^3 \alpha_i^q z_i & \sum_{i=1}^3 \alpha_i^q \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^u x_i & \sum_{i=1}^3 \alpha_i^u y_i & \sum_{i=1}^3 \alpha_i^u z_i & \sum_{i=1}^3 \alpha_i^u \\ \beta_2^v x_2 + \beta_3^v x_3 & \beta_2^v y_2 + \beta_3^v y_3 & \beta_2^v z_2 + \beta_3^v z_3 & \beta_2^v + \beta_3^v \\ \beta_2^w x_2 + \beta_3^w x_3 & \beta_2^w y_2 + \beta_3^w y_3 & \beta_2^w z_2 + \beta_3^w z_3 & \beta_2^w + \beta_3^w \\ \beta_2^q x_2 + \beta_3^q x_3 & \beta_2^q y_2 + \beta_3^q y_3 & \beta_2^q z_2 + \beta_3^q z_3 & \beta_2^q + \beta_3^q \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^u x_i & \sum_{i=1}^3 \alpha_i^u y_i & \sum_{i=1}^3 \alpha_i^u z_i & \sum_{i=1}^3 \alpha_i^u \\ \beta_2^v x_2 + \beta_3^v x_3 & \beta_2^v y_2 + \beta_3^v y_3 & \beta_2^v z_2 + \beta_3^v z_3 & \beta_2^v + \beta_3^v \\ \gamma^w x_3 & \gamma^w y_3 & \gamma^w z_3 & \gamma^w \\ \gamma^q x_3 & \gamma^q y_3 & \gamma^q z_3 & \gamma^q \end{vmatrix} = 0. \quad (3.40) \end{aligned}$$

Dabei sind

$$\begin{aligned}\beta_i^j &= \alpha_1^u \alpha_i^j - \alpha_1^j \alpha_i^u, & i = 2, 3, & \quad j = v, w, q, \\ \gamma^j &= \beta_2^v \beta_3^j - \beta_2^j \beta_3^v, & j = w, q.\end{aligned}\tag{3.41}$$

□

3.5 Zeilenraum von K : Dualität der Linearen Optimierung

Wir wollen in diesem Abschnitt untersuchen, inwieweit uns die Dualität der Linearen Optimierung weitere Informationen über die Matrix $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_0 \end{pmatrix}$ bzw. das Ungleichungs-

system $\begin{bmatrix} K_1 z > 0 \\ K_0 z = 0 \end{bmatrix}$ liefert.

Satz 3.5.1. (Alternativsatz [6].)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt genau eine der folgenden beiden Alternativen:

1. $\exists x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0 : Ax \leq b$;
2. $\exists u \in \mathbb{R}^m, u \geq 0 : u^T A \geq 0, u^T b < 0$.

Wir multiplizieren die beteiligten Ungleichungen mit -1 und erhalten den folgenden, zu Satz 3.5.1 äquivalenten Satz, mit $\bar{A} := -A$, $\bar{b} := -b$.

Satz 3.5.2.

Seien $\bar{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt genau eine der folgenden beiden Alternativen:

1. $\exists x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0 : \bar{A}x \geq \bar{b}$;
2. $\exists u \in \mathbb{R}^m, u \geq 0 : u^T \bar{A} \leq 0, u^T \bar{b} > 0$.

Für das System $\begin{bmatrix} K_1 z > 0 \\ K_0 z = 0 \end{bmatrix}$ machen wir im folgenden die Einschränkung $z \geq 0$. Ist $z_0 = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ eine Lösung mit $z_{\min} := \min\{z_i \mid i = 1, \dots, n\} < 0$, so gilt

$$K \begin{bmatrix} z_0 - z_{\min} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = K z_0 + 0 = K z_0,\tag{3.42}$$

das heißt, $z'_0 := (z_1 - z_{\min}, \dots, z_n - z_{\min})^T (\geq 0)$ ist eine nicht-negative Lösung. Ferner gilt für ein $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, und für vier affine Punkte $v_i = (x_i, y_i, z_i)^T \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} \Delta v_1 v_2 v_3 v_4 &> 0 \\ \Leftrightarrow \Delta v_1 v_2 v_3 v_4 &\geq \alpha. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Ist also K_1 von der Ordnung $\kappa_1 \times n$, so gibt es ein $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\kappa_1})^T \in \mathbb{R}^{\kappa_1}$, $a > 0$, und es gilt

$$\begin{aligned} K_1 z &> 0 \\ \Leftrightarrow K_1 z &\geq a. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Für unser ursprüngliches Ungleichungssystem erhalten wir

$$\left[\begin{array}{l} K_1 z > 0 \\ K_0 z = 0 \\ z \geq 0, z \neq 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} K_1 z \geq a \\ K_0 z \geq 0 \\ (-K_0) z \geq 0 \\ z \geq 0, z \neq 0, a > 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_0 \\ -K_0 \end{pmatrix} z \geq \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ z \geq 0, z \neq 0, a > 0 \end{array} \right]. \quad (\text{P})$$

Satz 3.5.3. (Lösbarkeit des Systems (P).)

Sei G ein Polyedergraph mit $n (\geq 4)$ Knoten, sei $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_0 \end{pmatrix}$ die über den Mengen $E(G)$ und $F_4(G)$ ermittelte Koeffizientenmatrix. K_1 sei von der Ordnung $\kappa_1 \times n$, K_0 sei von der Ordnung $\kappa_0 \times n$. Dann gibt es $z \in \mathbb{R}^n$, $z \geq 0$, und $a \in \mathbb{R}^{\kappa_1}$, $a > 0$, mit

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_0 \\ -K_0 \end{pmatrix} z \geq \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{P})$$

Beweis. Das System $\left[\begin{array}{l} K_1 z > 0 \\ K_0 z = 0 \end{array} \right]$ besitzt nach dem Satz von STEINITZ (Satz 2.2.2) immer eine Lösung $z \in \mathbb{R}^n$ und mit dem vorgenannten auch immer eine nicht-negative Lösung. Jetzt folgt die Aussage mit Satz 3.5.2, indem wir

$$\bar{A} := \begin{pmatrix} K_1 \\ K_0 \\ -K_0 \end{pmatrix}, \quad x := z, \quad \bar{b} := \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

setzen. □

Satz 3.5.4. (Unlösbarkeit des Systems (D).)

Es existiert kein $u \in \mathbb{R}^{(\kappa_1 + 2\kappa_0)}$, $u \geq 0$, mit

$$u^T \begin{pmatrix} K_1 \\ K_0 \\ -K_0 \end{pmatrix} \leq 0, \quad u^T \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > 0. \quad (\text{D})$$

Beweis. Dies folgt aus den Sätzen 3.5.2 und 3.5.3. □

3.6 Reduzierung des Systems

Wir betrachten noch einmal das System $\begin{bmatrix} K_1 z > 0 \\ K_0 z = 0 \end{bmatrix}$ unter der Fragestellung, ob man die Matrix K in einer im folgenden zu präzisierenden Weise "verkleinern" kann. Wir haben bereits in Abschnitt 3.5 die Einschränkung $z \geq 0$ vorgenommen. Jetzt werden wir $z_{\bar{v}} = 0$ für bestimmte Ecken $\bar{v} \in V(Q)$ fordern.

Sei G ein Polyedergraph, sei $F(G) = \{f_1, \dots, f_p\}$ die Menge der Gebiete von G mit jeweils k_1, \dots, k_p Knoten. Sei ohne Beschränkung f_1 das Außengebiet von G . Wir setzen

$$\begin{aligned} t_1 &:= k_1, \\ t_2 &:= n - t_1. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Seien $V(G) = V_1 + V_2$ und $E(G) = E_1 + E_2$ die Knoten- bzw. Kantenmenge von G , mit

$$\begin{aligned} V_1 &:= \{v_1, v_2, \dots, v_{t_1}\}, \\ V_2 &:= \{v_{t_1+1}, v_{t_1+2}, \dots, v_n\}, \\ E_1 &:= \{e_1, e_2, \dots, e_{t_1}\}, \\ E_2 &:= \{e_{t_1+1}, e_{t_1+2}, \dots, e_m\}, \end{aligned} \tag{3.47}$$

wobei V_1 und E_1 die Mengen der äußeren Knoten bzw. äußeren Kanten von G bezeichnen, V_2 und E_2 die Mengen der inneren Knoten bzw. inneren Kanten (bezüglich der Einbettung Γ).

Wir betrachten jetzt aus der Menge aller möglichen Realisierungen Q von G diejenigen 3-Polyeder, für die $z_{\bar{v}_i} = 0$, $i = 1, \dots, t_1$. Die zum Komplement des Außengebietes von G gehörige Facette von Q liegt also in der xy -Ebene, und somit sind die z -Koordinaten aller zu inneren Knoten von G gehörigen Ecken von Q echt positiv.

Sei $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_0 \end{pmatrix}$. K_1 sei von der Ordnung $\kappa_1 \times n = \kappa_1 \times (t_1 + t_2)$, K_0 sei von der Ordnung $\kappa_0 \times n = \kappa_0 \times (t_1 + t_2)$. Wir setzen

$$\begin{aligned} z &= (0, \dots, 0, z_{t_1+1}, \dots, z_n)^T =: (0, \dots, 0, \zeta)^T, \quad \zeta := (z_{t_1+1}, \dots, z_n)^T (> 0), \\ K &= \begin{pmatrix} K_1 \\ K_0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{01} & K_{02} \end{pmatrix} =: (\bar{K}_1 \quad \bar{K}_2) = \\ &\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1,t_1} & c_{1,t_1+1} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{\kappa_1,1} & \dots & c_{\kappa_1,t_1} & c_{\kappa_1,t_1+1} & \dots & c_{\kappa_1,n} \\ c_{\kappa_1+1,1} & \dots & c_{\kappa_1+1,t_1} & c_{\kappa_1+1,t_1+1} & \dots & c_{\kappa_1+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{\kappa_1+\kappa_0,1} & \dots & c_{\kappa_1+\kappa_0,t_1} & c_{\kappa_1+\kappa_0,t_1+1} & \dots & c_{\kappa_1+\kappa_0,n} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.48}$$

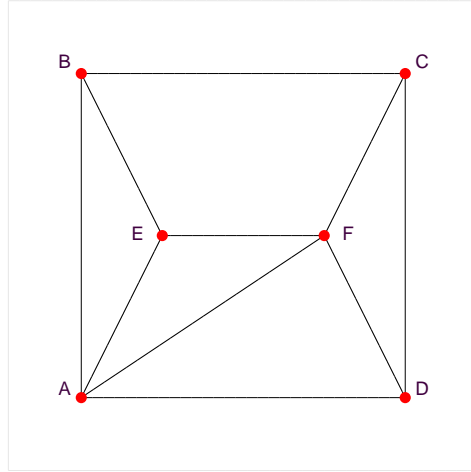


Abbildung 3.11: Graph G_{65} mit äußeren Knoten $v_1, v_2, v_3, v_4 = A, B, C, D$

Das Ausgangssystem $\begin{bmatrix} K_1 z > 0 \\ K_0 z = 0 \\ z \geq 0 \end{bmatrix}$ verändert sich nun zu

$$\begin{bmatrix} K_1 z > 0 \\ K_0 z = 0 \\ z \geq 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K_{11} \ K_{12}) z > 0 \\ (K_{01} \ K_{02}) z = 0 \\ z \geq 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{12} \zeta > 0 \\ K_{02} \zeta = 0 \\ \zeta > 0 \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Lemma 3.6.1. (Eigenschaften der Matrix \bar{K}_2 .)

Sei $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{01} & K_{02} \end{pmatrix} = (\bar{K}_1 \ \bar{K}_2)$ die zu einem Polyedergraphen G mit n Knoten gehörige Matrix. K_1 sei von der Ordnung $\kappa_1 \times n = \kappa_1 \times (t_1 + t_2)$, K_0 sei von der Ordnung $\kappa_0 \times n = \kappa_0 \times (t_1 + t_2)$. Seien V , E , z und ζ wie in (3.47) und (3.48).

Dann gilt für die Matrix $\bar{K}_2 = \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{02} \end{pmatrix}$ des Systems $\begin{bmatrix} K_{12} \zeta > 0 \\ K_{02} \zeta = 0 \\ \zeta > 0 \end{bmatrix}$:

1. \bar{K}_2 ist von der Ordnung $(\kappa_1 + \kappa_0) \times t_2$;
2. Jede Zeile von K_{12} enthält mindestens einen und höchstens vier Nichtnull-Einträge;
3. Alle Zeilen von K_{12} mit genau einem Nichtnull-Eintrag gehören zu einer äußeren Kante von G und sind redundant;
4. Jede Zeile von K_{02} enthält höchstens vier Nichtnull-Einträge, aber niemals genau einen Nichtnull-Eintrag;
5. Alle Zeilen von K_{02} mit 0 Nichtnull-Einträgen (Nullzeilen) sind redundant.

6. Für die Zeilen $c_i = (c_{i1}, \dots, c_{i,t_2})$ von \bar{K}_2 mit genau vier Nichtnull-Einträgen gilt:

$$\sum_{j=1}^{t_2} c_{ij} = 0. \quad (3.50)$$

Beweis.

1. Dies folgt mit der Konstruktion von \bar{K}_2 .
2. K enthält in jeder Zeile genau vier Nichtnull-Einträge, also enthält K_{12} in jeder Zeile höchstens vier Nichtnull-Einträge. Wir nehmen an, K_{12} enthalte eine Nullzeile. Dann enthält $K_1 = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \end{pmatrix}$ eine Zeile mit vier Nichtnull-Einträgen, die zu vier Knoten $v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, v_{i4} \in V_1$ des Außengebietes gehören, und es gilt

$$\Delta v_{i1} v_{i2} v_{i3} v_{i4} > 0, \quad (3.51)$$

ein Widerspruch.

3. G besitzt mindestens drei äußere Knoten und mindestens einen inneren Knoten. Seien e_1, \dots, e_{t_1} die äußeren Kanten von G . Für jede äußere Kante $e_i = v_{i1} v_{i2}$ von G ist nur genau ein innerer Knoten an jeder zu e gehörigen Ungleichung beteiligt, denn der vierte Knoten ist ebenfalls ein äußerer Knoten, da eines der Gebiete f, \bar{f} das Außengebiet ist. Seien dieser dritte äußere Knoten mit v_{i3} , der innere Knoten mit v bezeichnet. Dann ergibt sich, gegebenenfalls nach Umindizieren:

$$\Delta v_{i1} v_{i2} v_{i3} v = [\Delta v_{i1} v_{i2} v_{i3}] z_{\bar{v}} > 0 \Leftrightarrow z_{\bar{v}} > 0. \quad (3.52)$$

Alle zu äußeren Kanten gehörigen Ungleichungen im System $K_{12} \zeta > 0$ sind also redundant. Die zu diesen Ungleichungen gehörigen Zeilen in K_{12} haben jeweils genau einen Nichtnull-Eintrag.

4. K_{02} besitzt nicht mehr Nichtnull-Einträge in jeder Zeile als K , also höchstens vier. Enthielte K_{02} eine Zeile $c_i = (c_{i1}, \dots, c_{i,t_2})$ mit genau einem Nichtnull-Eintrag, so wäre $c_i \zeta \neq 0$, ein Widerspruch.
5. Klar.
6. Dies folgt mit Lemma 3.1.2 in Abschnitt 3.1.

□

Beispiel 3.6.2. Wir betrachten noch einmal den Graphen G_{65} (Abbildung 3.11), dem wir jetzt (x, y) -Koordinaten $(x_v, y_v)^T$, $v \in V(G)$, zuordnen: $\Gamma(A) := (-1, -1)^T$, $\Gamma(B) := (-1, 1)^T$, $\Gamma(C) := (1, 1)^T$, $\Gamma(D) := (1, -1)^T$, $\Gamma(E) := (-\frac{1}{2}, 0)^T$, $\Gamma(F) := (\frac{1}{2}, 0)^T$. Für die bereits in Abschnitt 3.1 berechnete Matrix $K(G_{65})$ erhalten wir die folgende

Untermatrix $\bar{K}_2 := \bar{K}_2(G_{65})$:

$$\bar{K}_2 = \begin{pmatrix} -\Delta ABC & 0 & 1 \\ -\Delta ABD & 0 & 2 \\ 0 & -\Delta ABD & 3 \\ 0 & -\Delta ACD & 4 \\ -\Delta ABF & \Delta ABE & 5 \\ -\Delta ADF & \Delta ADE & 6 \\ -\Delta ABC & 0 & 7 \\ 0 & -\Delta ABC & 8 \\ -\Delta BCD & 0 & 9 \\ 0 & -\Delta BCD & 10 \\ -\Delta ABC & 0 & 11 \\ -\Delta ABF & \Delta ABE & 12 \\ 0 & -\Delta ACD & 13 \\ 0 & -\Delta BCD & 14 \\ 0 & -\Delta BCD & 15 \\ \Delta CDF & -\Delta CDE & 16 \\ 0 & -\Delta ACD & 17 \\ -\Delta ABF & \Delta ABE & 18 \\ -\Delta ACF & \Delta ACE & 19 \\ \\ 0 & 0 & 20 \\ \Delta BCF & -\Delta BCE & 21 \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Alle Zeilen von \bar{K}_2 mit einem Null-Eintrag sind redundant, dies sind die Zeilen 1 – 4, 7 – 11, 13 – 15, 17 und 20. Die Zeilen 12 und 18 sind identisch mit Zeile 5, also ebenfalls redundant. Mit den gewählten Koordinaten gilt

$$\begin{aligned} \Delta CDF &= \Delta ABE, \\ \Delta CDE &= \Delta ABF, \end{aligned} \quad (3.54)$$

das heißt, die Zeile 16 kann äquivalent notiert werden als

$$(\Delta ABE \quad -\Delta ABF). \quad (3.55)$$

Es gilt ferner

$$\Delta ACE = -\Delta ACF > 0, \quad (3.56)$$

das heißt, die Zeile 19 ist äquivalent zu

$$z_E + z_F > 0 \quad (3.57)$$

und damit ebenfalls redundant. Somit verbleiben die Zeilen 5, 6, 16 und 21, und wir erhalten das folgende System:

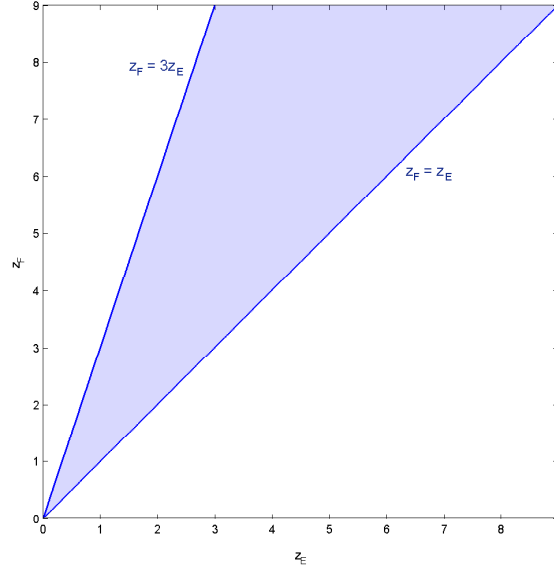


Abbildung 3.12: Lösungsmenge des Systems $K'_{12}(G_{66})\zeta > 0$

$$K'_{12}\zeta := \begin{pmatrix} -\Delta ABF & \Delta ABE \\ -\Delta ADF & \Delta ADE \\ \Delta ABE & -\Delta ABF \end{pmatrix} \zeta = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_E \\ z_F \end{pmatrix} > 0, \quad (3.58)$$

$$K'_{02}\zeta := \begin{pmatrix} \Delta BCF & -\Delta BCE \end{pmatrix} \zeta = \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_E \\ z_F \end{pmatrix} = 0.$$

Das Teilsystem $K'_{02}\zeta = 0$ ergibt die Lösung $z_E = z_F$. Dies ist inkonsistent bezüglich der zweiten Zeile des Systems $K'_{12}\zeta > 0$, $z_E < z_F$. Es folgt, daß das reduzierte System

$$\begin{bmatrix} K_{12}\zeta > 0 \\ K_{02}\zeta = 0 \\ \zeta > 0 \end{bmatrix} \text{ mit den von uns gewählten Koordinaten keine Lösung besitzt.}$$

Wir variieren nun die y -Koordinate des Knotens F : $\Gamma'(v) := \Gamma(v)$, $v \in V(G) - F$, $\Gamma'(F) := (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$, und erhalten

$$K'_{12}\zeta := \begin{pmatrix} -\Delta ABF & \Delta ABE \\ -\Delta ADF & \Delta ADE \\ \Delta CDF & -\Delta CDE \end{pmatrix} \zeta = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \zeta > 0, \quad (3.59)$$

$$K'_{02}\zeta := \begin{pmatrix} \Delta BCF & -\Delta BCE \end{pmatrix} \zeta = \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} \zeta = 0,$$

äquivalent zu

$$z_F < 3z_E, \quad z_F > \frac{1}{2}z_E, \quad z_F > \frac{1}{3}z_E, \quad z_F = \frac{3}{2}z_E, \quad (3.60)$$

und damit die Lösungsmenge $z_F = \frac{3}{2}z_E$. Abbildung 1.1 zeigt die Einbettung $\Gamma'(G)$ und eine mögliche Realisierung Q mit $z_E = 1$, $z_F = \frac{3}{2}$.

Beispiel 3.6.3. Wir betrachten den Graphen G_{66} und die zugehörige Matrix $K(G_{66})$ (Tabelle A.9). Wir übernehmen die Koordinaten $\Gamma(v)$ aus Beispiel 3.6.2 und erhalten:

$$\bar{K}_2(G_{66}) = \begin{pmatrix} -\Delta ABC & 0 & 1 \\ -\Delta ABD & 0 & 2 \\ 0 & -\Delta ABD & 3 \\ 0 & -\Delta ACD & 4 \\ -\Delta ABF & \Delta ABE & 5 \\ -\Delta ADF & \Delta ADE & 6 \\ 0 & -\Delta ABC & 7 \\ 0 & -\Delta BCD & 8 \\ -\Delta ABF & \Delta ABE & 9 \\ \Delta BCF & -\Delta BCE & 10 \\ 0 & -\Delta ACD & 11 \\ 0 & -\Delta BCD & 12 \\ 0 & -\Delta BCD & 13 \\ 0 & -\Delta ACD & 14 \\ -\Delta ABF & \Delta ABE & 15 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}. \quad (3.61)$$

Die Zeilen ohne Nichtnull-Eintrag sind die Zeilen 5, 6, 9 (identisch mit Zeile 5), 10 und 15 (identisch mit Zeile 5). Wir erhalten somit das System

$$K'_{12}\zeta := \begin{pmatrix} -\Delta ABF & \Delta ABE \\ -\Delta ADF & \Delta ADE \\ \Delta BCF & -\Delta BCE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_E \\ z_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_E \\ z_F \end{pmatrix} > 0, \quad (3.62)$$

äquivalent zu

$$z_E < z_F < 3z_E. \quad (3.63)$$

Die Lösungsmenge des Ungleichungssystems (3.63) ist in Abbildung 3.12 dargestellt:

Es handelt sich um das Innere des durch die Halbgeraden $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\lambda \geq 0$, definierten Kegels.

Beispiel 3.6.4. (Reduziertes System für $G = R_{n-1}$.)

Sei $G = (V, E) = R_{n-1}$ (Abbildung 3.13),

$$\begin{aligned} V &= \{A, B_2, \dots, B_n\}, \\ E &= \{AB_i, i = 2, \dots, n, B_i B_{i+1}, i = 2, \dots, n-1, B_n B_2\}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Sei $\bar{K}_2(G) = \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{02} \end{pmatrix}$ die Koeffizientenmatrix des reduzierten Systems $\begin{bmatrix} K_{12} \zeta > 0 \\ K_{02} \zeta = 0 \\ \zeta > 0 \end{bmatrix}$.

1. \bar{K}_2 besteht aus genau einer Spalte:

$$\bar{K}_2 = \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{\kappa_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

2. Alle Koeffizienten von K_{12} sind positiv: $c_i > 0$, $i = 1, \dots, \kappa_1$, das heißt, das Teilsystem $K_{12} \zeta > 0$ ist äquivalent zur Ungleichung $z_A > 0$.
3. K_{02} ist eine $(\kappa_0 \times 1)$ -Nullmatrix.

Beispiel 3.6.5. (Reduziertes System für \bar{G}_n .)

Sei $G = (V, E)$ der Graph \bar{G}_n mit $n \geq 4$ Knoten (Abbildung 3.14),

$$\begin{aligned} V &= \{ A_1, A_2, B_3, \dots, B_n \}, \\ E &= \{ A_1 A_2, A_i B_j, i = 1, 2, j = 3, \dots, n, B_i B_{i+1}, i = 3, \dots, n-1 \}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Sei $\bar{K}_2 = \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{02} \end{pmatrix} = (K_{12})$ die Koeffizientenmatrix des reduzierten Systems $\begin{bmatrix} K_{12} \zeta > 0 \\ \zeta > 0 \end{bmatrix}$.

1. K_{12} ist von der Ordnung $3(n-2) \times (n-3)$.
2. Die zu den Kanten $A_1 A_2, A_1 B_3, A_2 B_3, B_3 B_4$ gehörigen Zeilen von K_{12} haben genau einen Nichtnull-Eintrag, und zwar
 - a) in der zu B_n gehörigen Spalte für $A_1 A_2$,
 - b) in der zu B_4 gehörigen Spalte für die drei übrigen Kanten.
3. Die zu den Kanten $A_1 B_4, A_2 B_4, A_1 B_n, A_2 B_n, B_j B_{j+1}, j = 4, \dots, n-1$, gehörigen Zeilen von K_{12} haben genau zwei Nichtnull-Einträge, und zwar
 - a) in den zu B_4 und B_5 gehörigen Spalten für die Kanten $A_i B_4, i = 1, 2$,
 - b) in den zu B_{n-1} und B_n gehörigen Spalten für die Kanten $A_i B_n, i = 1, 2$,
 - c) in den zu B_j und B_{j+1} gehörigen Spalten für $B_j B_{j+1}, j = 4, \dots, n-1$.
4. Die zu den Kanten $A_i B_j, i = 1, 2, j = 5, \dots, n-1$, gehörigen Zeilen von K_{12} haben genau drei Nichtnull-Einträge, und dieses in den zu $B_{j-1}, B_j, B_{j+1}, j = 5, \dots, n-1$, gehörigen Spalten.

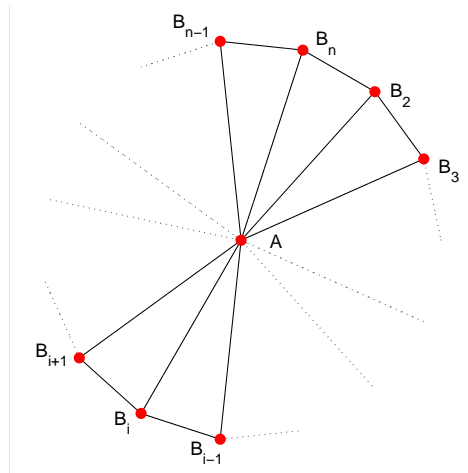


Abbildung 3.13: Graph R_{n-1} mit äußeren Knoten $v_1, \dots, v_{n-1} = B_2, \dots, B_n$

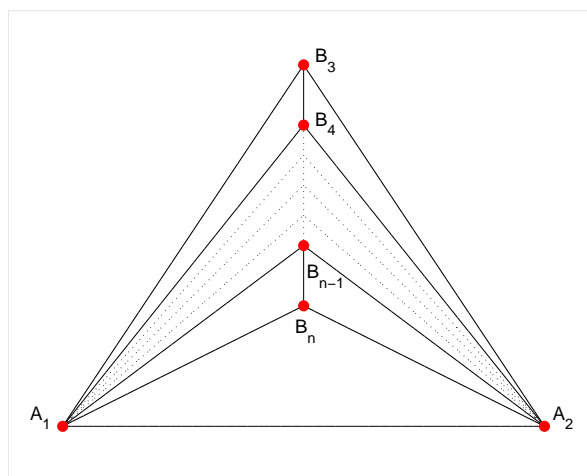


Abbildung 3.14: Graph \tilde{G}_n mit äußeren Knoten $v_1, v_2, v_3 = A_1, A_2, B_3$

4 Schlußbemerkungen

Wir haben in dieser Arbeit die Koeffizientenmatrix $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_0 \end{pmatrix}$ des Systems $\begin{bmatrix} K_1 z > 0 \\ K_0 z = 0 \end{bmatrix}$ untersucht. Wir konnten Aufschluß gewinnen über Zeilen- und Spaltenstruktur von K , die Anzahl und das Auftreten von Nichtnull-Einträgen und die Charakterisierung des Zeilenraums von K (Abschnitte 3.1, 3.5). Wir konnten einen Zusammenhang herstellen zwischen mehrfachen identischen Ungleichungen im Teilsystem $K_1 z > 0$ und Knoten vom Grad 3 in $G(Q)$ (Abschnitt 3.3). Für die Untermatrix K_0 wurde eine äquivalente kleinere Matrix K'_0 gefunden, die die affine Abhängigkeit der Ecken der Facetten $f \in F_4(Q)$ nicht-redundant abbildet (Abschnitt 3.4). Schließlich haben wir in Abschnitt 3.6 einen Ansatz vorgelegt, wie durch Übergang zu einem reduzierten System (unter zusätzlichen Einschränkungen an das Ausgangssystem) der Berechnungsaufwand verkleinert werden kann.

Bemerkungen

1. Die Ordnung der Matrix K ist nur für den Fall der Triangulierung, also $k_i = 3$, $i = 1, \dots, p$, genau bestimmt. In diesem Fall besitzt der Graph G $m = 3(n - 2)$ Kanten, und die Matrix K besitzt ebenfalls genau $3(n - 2)$ Zeilen. (Die Matrix K_0 ist im Fall eines triangulierten Graphen stets leer.) Ist G ein Graph mit k -eckigen Gebieten, $k > 3$, so gilt $m < 3(n - 2)$; andererseits ergeben sich bei Betrachtung einer Kante e zwei oder mehr Ungleichungen, falls diese Kante zwei Gebiete f_i, f_j mit $k_i > 3$ oder $k_j > 3$ trennt. Es kann nach einer oberen Schranke für die Zeilenzahl von K gefragt werden.
2. Die Lösungsmenge

$$Z = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid \begin{bmatrix} K_1 z > 0 \\ K_0 z = 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} K_1 \\ K_0 \\ -K_0 \end{pmatrix} z \geq \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (4.1)$$

ist ein (unbeschränktes) konvexes Polyeder. Mit Ausnahme der Beispiele 3.6.2 und 3.6.3 in Abschnitt 3.6 haben wir keine konkreten Berechnungen der Lösungsmenge Z vorgenommen. Die Betrachtungen der vorliegenden Arbeit waren kombinatorischer Natur. Eine spezielle Lösung z_0 kann mit Methoden der Linearen Optimierung ermittelt werden.

A Berechnung von K für kleine n

Abbildung A.1 zeigt alle Polyedergraphen mit höchstens sechs Knoten. (Die Einbettung $\Gamma(G)$ wurde unter Beachtung der Konvexität, sonst aber beliebig, gewählt.) Die für diese Graphen und eine gegebene Knotenindizierung ermittelten Matrizen $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_0 \end{pmatrix}$ sind in den Tabellen A.1 bis A.10 aufgeführt. Links der Matrix stehen jeweils die betrachteten Kanten $e \in E(G)$ für die Untermatrix K_1 bzw. die betrachteten Gebiete $f \in F_4(G)$ für die Untermatrix K_0 und die zugehörigen Knoten $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V(G)$.

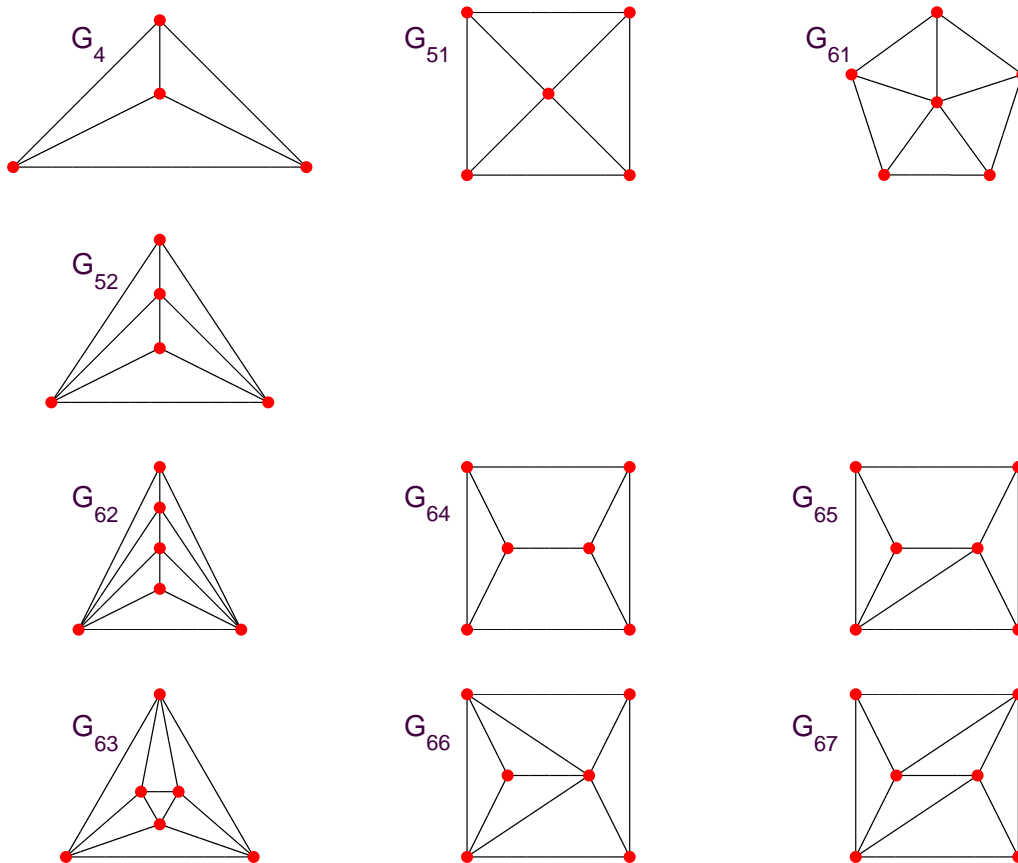
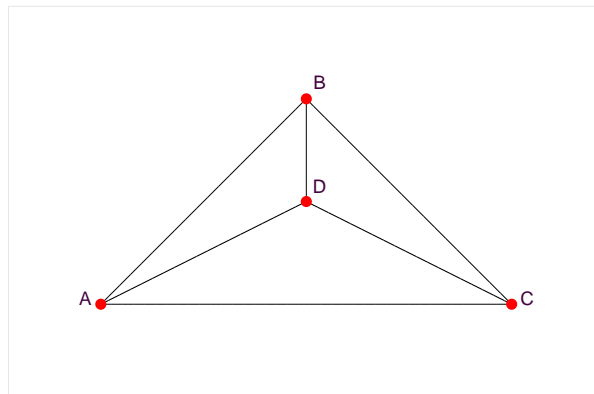


Abbildung A.1: Nichtisomorphe Polyedergraphen mit $n \leq 6$ Knoten

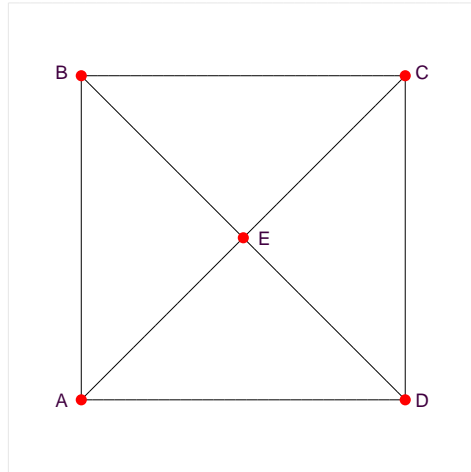
Anhang A



<i>AB</i>	<i>ABCD</i>	$\left(\begin{array}{cccc} \Delta BCD & -\Delta ACD & \Delta ABD & -\Delta ABC \\ \Delta BCD & -\Delta ACD & \Delta ABD & -\Delta ABC \\ \Delta BCD & -\Delta ACD & \Delta ABD & -\Delta ABC \\ \Delta BCD & -\Delta ACD & \Delta ABD & -\Delta ABC \\ \Delta BCD & -\Delta ACD & \Delta ABD & -\Delta ABC \\ \Delta BCD & -\Delta ACD & \Delta ABD & -\Delta ABC \end{array} \right)$	1
<i>AC</i>	<i>ACDB</i>		2
<i>AD</i>	<i>ADBC</i>		3
<i>BC</i>	<i>BCAD</i>		4
<i>BD</i>	<i>BDCA</i>		5
<i>CD</i>	<i>CDAB</i>		6

Tabelle A.1: Graph G_4 und Matrix $K(G_4)$

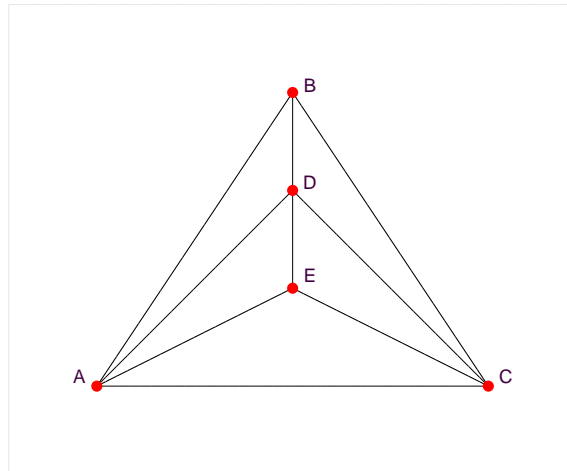
Anhang A



<i>AB</i>	<i>ABCE</i>	(ΔBCE	$-\Delta ACE$	ΔABE	0	$-\Delta ABC$	1
<i>AB</i>	<i>ABDE</i>		ΔBDE	$-\Delta ADE$	0	ΔABE	$-\Delta ABD$	2
<i>AD</i>	<i>ADEB</i>		ΔBDE	$-\Delta ADE$	0	ΔABE	$-\Delta ABD$	3
<i>AD</i>	<i>ADEC</i>		ΔCDE	0	$-\Delta ADE$	ΔACE	$-\Delta ACD$	4
<i>AE</i>	<i>AEBD</i>		ΔBDE	$-\Delta ADE$	0	ΔABE	$-\Delta ABD$	5
<i>BC</i>	<i>BCAE</i>		ΔBCE	$-\Delta ACE$	ΔABE	0	$-\Delta ABC$	6
<i>BC</i>	<i>BCDE</i>		0	ΔCDE	$-\Delta BDE$	ΔBCE	$-\Delta BCD$	7
<i>BE</i>	<i>BECA</i>		ΔBCE	$-\Delta ACE$	ΔABE	0	$-\Delta ABC$	8
<i>CD</i>	<i>CDAE</i>		ΔCDE	0	$-\Delta ADE$	ΔACE	$-\Delta ACD$	9
<i>CD</i>	<i>CDBE</i>		0	ΔCDE	$-\Delta BDE$	ΔBCE	$-\Delta BCD$	10
<i>CE</i>	<i>CEDB</i>		0	ΔCDE	$-\Delta BDE$	ΔBCE	$-\Delta BCD$	11
<i>DE</i>	<i>DEAC</i>		ΔCDE	0	$-\Delta ADE$	ΔACE	$-\Delta ACD$	12
<i>ABCD</i>	<i>ABCD</i>		ΔBCD	$-\Delta ACD$	ΔABD	$-\Delta ABC$	0	13

Tabelle A.2: Graph G_{51} und Matrix $K(G_{51})$

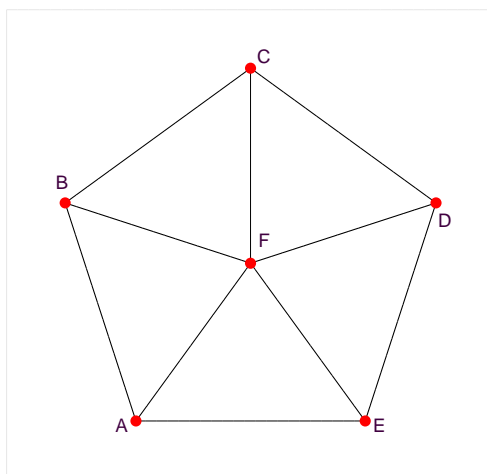
Anhang A



<i>AB</i>	<i>ABCD</i>	(ΔBCD	$-\Delta ACD$	ΔABD	$-\Delta ABC$	0	1
<i>AC</i>	<i>ACEB</i>		ΔBCE	$-\Delta ACE$	ΔABE	0	$-\Delta ABC$	2
<i>AD</i>	<i>ADBE</i>		$-\Delta BDE$	ΔADE	0	$-\Delta ABE$	ΔABD	3
<i>AE</i>	<i>AEDC</i>		$-\Delta CDE$	0	ΔADE	$-\Delta ACE$	ΔACD	4
<i>BC</i>	<i>BCAD</i>		ΔBCD	$-\Delta ACD$	ΔABD	$-\Delta ABC$	0	5
<i>BD</i>	<i>BDCA</i>		ΔBCD	$-\Delta ACD$	ΔABD	$-\Delta ABC$	0	6
<i>CD</i>	<i>CDEB</i>		0	$-\Delta CDE$	ΔBDE	$-\Delta BCE$	ΔBCD	7
<i>CE</i>	<i>CEAD</i>		$-\Delta CDE$	0	ΔADE	$-\Delta ACE$	ΔACD	8
<i>DE</i>	<i>DECA</i>		$-\Delta CDE$	0	ΔADE	$-\Delta ACE$	ΔACD	9

Tabelle A.3: Graph G_{52} und Matrix $K(G_{52})$

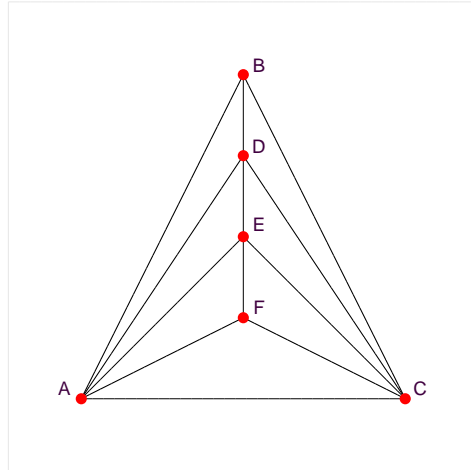
Anhang A



<i>AB</i>	<i>ABCF</i>	ΔBCF	$-\Delta ACF$	ΔABF	0	0	$-\Delta ABC$	1
<i>AB</i>	<i>ABDF</i>	ΔBDF	$-\Delta ADF$	0	ΔABF	0	$-\Delta ABD$	2
<i>AB</i>	<i>ABEF</i>	ΔBEF	$-\Delta AEF$	0	0	ΔABF	$-\Delta ABE$	3
<i>AE</i>	<i>AEFB</i>	ΔBEF	$-\Delta AEF$	0	0	ΔABF	$-\Delta ABE$	4
<i>AE</i>	<i>AEFC</i>	ΔCEF	0	$-\Delta AEF$	0	ΔACF	$-\Delta ACE$	5
<i>AE</i>	<i>AEFD</i>	ΔDEF	0	0	$-\Delta AEF$	ΔADF	$-\Delta ADE$	6
<i>AF</i>	<i>AFBE</i>	ΔBEF	$-\Delta AEF$	0	0	ΔABF	$-\Delta ABE$	7
<i>BC</i>	<i>BCAF</i>	ΔBCF	$-\Delta ACF$	ΔABF	0	0	$-\Delta ABC$	8
<i>BC</i>	<i>BCDF</i>	0	ΔCDF	$-\Delta BDF$	ΔBCF	0	$-\Delta BCD$	9
<i>BC</i>	<i>BCEF</i>	0	ΔCEF	$-\Delta BEF$	0	ΔBCF	$-\Delta BCE$	10
<i>BF</i>	<i>BFCA</i>	ΔBCF	$-\Delta ACF$	ΔABF	0	0	$-\Delta ABC$	11
<i>CD</i>	<i>CDAF</i>	ΔCDF	0	$-\Delta ADF$	ΔACF	0	$-\Delta ACD$	12
<i>CD</i>	<i>CDBF</i>	0	ΔCDF	$-\Delta BDF$	ΔBCF	0	$-\Delta BCD$	13
<i>CD</i>	<i>CDEF</i>	0	0	ΔDEF	$-\Delta CEF$	ΔCDF	$-\Delta CDE$	14
<i>CF</i>	<i>CFDB</i>	0	ΔCDF	$-\Delta BDF$	ΔBCF	0	$-\Delta BCD$	15
<i>DE</i>	<i>DEAF</i>	ΔDEF	0	0	$-\Delta AEF$	ΔADF	$-\Delta ADE$	16
<i>DE</i>	<i>DEBF</i>	0	ΔDEF	0	$-\Delta BEF$	ΔBDF	$-\Delta BDE$	17
<i>DE</i>	<i>DECF</i>	0	0	ΔDEF	$-\Delta CEF$	ΔCDF	$-\Delta CDE$	18
<i>DF</i>	<i>DFEC</i>	0	0	ΔDEF	$-\Delta CEF$	ΔCDF	$-\Delta CDE$	19
<i>EF</i>	<i>EFAD</i>	ΔDEF	0	0	$-\Delta AEF$	ΔADF	$-\Delta ADE$	20
<i>ABCDE</i>	<i>ABCD</i>	ΔBCD	$-\Delta ACD$	ΔABD	$-\Delta ABC$	0	0	21
<i>ABCDE</i>	<i>ABCE</i>	ΔBCE	$-\Delta ACE$	ΔABE	0	$-\Delta ABC$	0	22
<i>ABCDE</i>	<i>ABDE</i>	ΔBDE	$-\Delta ADE$	0	ΔABE	$-\Delta ABD$	0	23
<i>ABCDE</i>	<i>ACDE</i>	ΔCDE	0	$-\Delta ADE$	ΔACE	$-\Delta ACD$	0	24
<i>ABCDE</i>	<i>BCDE</i>	0	ΔCDE	$-\Delta BDE$	ΔBCE	$-\Delta BCD$	0	25

Tabelle A.4: Graph G_{61} und Matrix $K(G_{61})$

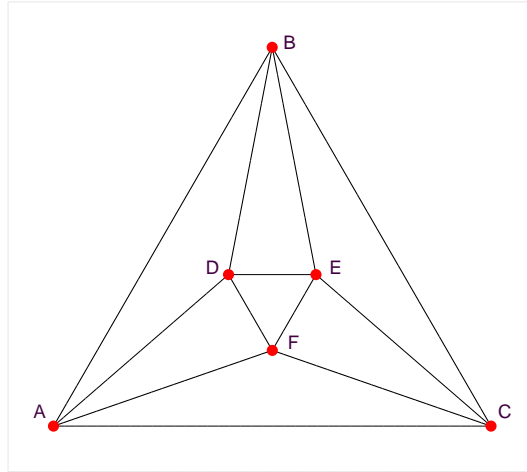
Anhang A



<i>AB</i>	<i>ABCD</i>	(ΔBCD	$-\Delta ACD$	ΔABD	$-\Delta ABC$	0	0)	1
<i>AC</i>	<i>ACFB</i>		ΔBCF	$-\Delta ACF$	ΔABF	0	0	$-\Delta ABC$		2
<i>AD</i>	<i>ADBE</i>		$-\Delta BDE$	ΔADE	0	$-\Delta ABE$	ΔABD	0		3
<i>AE</i>	<i>AEDF</i>		$-\Delta DEF$	0	0	ΔAEF	$-\Delta ADF$	ΔADE		4
<i>AF</i>	<i>AFEC</i>		$-\Delta CEF$	0	ΔAEF	0	$-\Delta ACF$	ΔACE		5
<i>BC</i>	<i>BCAD</i>		ΔBCD	$-\Delta ACD$	ΔABD	$-\Delta ABC$	0	0		6
<i>BD</i>	<i>BDCA</i>		ΔBCD	$-\Delta ACD$	ΔABD	$-\Delta ABC$	0	0		7
<i>CD</i>	<i>CDEB</i>		0	$-\Delta CDE$	ΔBDE	$-\Delta BCE$	ΔBCD	0		8
<i>CE</i>	<i>CEFD</i>		0	0	ΔDEF	$-\Delta CEF$	ΔCDF	$-\Delta CDE$		9
<i>CF</i>	<i>CFAE</i>		$-\Delta CEF$	0	ΔAEF	0	$-\Delta ACF$	ΔACE		10
<i>DE</i>	<i>DECA</i>		$-\Delta CDE$	0	ΔADE	$-\Delta ACE$	ΔACD	0		11
<i>EF</i>	<i>EFCA</i>		$-\Delta CEF$	0	ΔAEF	0	$-\Delta ACF$	ΔACE		12

Tabelle A.5: Graph G_{62} und Matrix $K(G_{62})$

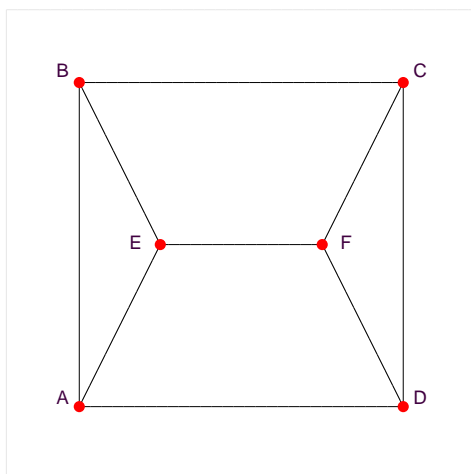
Anhang A



<i>AB</i>	<i>ABCD</i>	ΔBCD	$-\Delta ACD$	ΔABD	$-\Delta ABC$	0	0	1
<i>AC</i>	<i>ACFB</i>	ΔBCF	$-\Delta ACF$	ΔABF	0	0	$-\Delta ABC$	2
<i>AD</i>	<i>ADBF</i>	$-\Delta BDF$	ΔADF	0	$-\Delta ABF$	0	ΔABD	3
<i>AF</i>	<i>AFDC</i>	$-\Delta CDF$	0	ΔADF	$-\Delta ACF$	0	ΔACD	4
<i>BC</i>	<i>BCAE</i>	ΔBCE	$-\Delta ACE$	ΔABE	0	$-\Delta ABC$	0	5
<i>BD</i>	<i>BDEA</i>	$-\Delta BDE$	ΔADE	0	$-\Delta ABE$	ΔABD	0	6
<i>BE</i>	<i>BECD</i>	0	ΔCDE	$-\Delta BDE$	ΔBCE	$-\Delta BCD$	0	7
<i>CE</i>	<i>CEFB</i>	0	$-\Delta CEF$	ΔBEF	0	$-\Delta BCF$	ΔBCE	8
<i>CF</i>	<i>CFAE</i>	$-\Delta CEF$	0	ΔAEF	0	$-\Delta ACF$	ΔACE	9
<i>DE</i>	<i>DEBF</i>	0	ΔDEF	0	$-\Delta BEF$	ΔBDF	$-\Delta BDE$	10
<i>DF</i>	<i>DFEA</i>	ΔDEF	0	0	$-\Delta AEF$	ΔADF	$-\Delta ADE$	11
<i>EF</i>	<i>EFCD</i>	0	0	ΔDEF	$-\Delta CEF$	ΔCDF	$-\Delta CDE$	12

Tabelle A.6: Graph G_{63} und Matrix $K(G_{63})$

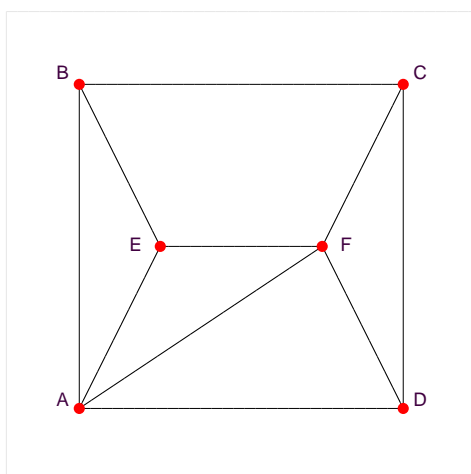
Anhang A



<i>AB</i>	<i>ABCE</i>	ΔBCE	$-\Delta ACE$	ΔABE	0	$-\Delta ABC$	0	1
<i>AB</i>	<i>ABDE</i>	ΔBDE	$-\Delta ADE$	0	ΔABE	$-\Delta ABD$	0	2
<i>AD</i>	<i>ADEB</i>	ΔBDE	$-\Delta ADE$	0	ΔABE	$-\Delta ABD$	0	3
<i>AD</i>	<i>ADEC</i>	ΔCDE	0	$-\Delta ADE$	ΔACE	$-\Delta ACD$	0	4
<i>AD</i>	<i>ADFB</i>	ΔBDF	$-\Delta ADF$	0	ΔABF	0	$-\Delta ABD$	5
<i>AD</i>	<i>ADFC</i>	ΔCDF	0	$-\Delta ADF$	ΔACF	0	$-\Delta ACD$	6
<i>AE</i>	<i>AEBD</i>	ΔBDE	$-\Delta ADE$	0	ΔABE	$-\Delta ABD$	0	7
<i>AE</i>	<i>AEBF</i>	$-\Delta BEF$	ΔAEF	0	0	$-\Delta ABF$	ΔABE	8
<i>BC</i>	<i>BCAE</i>	ΔBCE	$-\Delta ACE$	ΔABE	0	$-\Delta ABC$	0	9
<i>BC</i>	<i>BCAF</i>	ΔBCF	$-\Delta ACF$	ΔABF	0	0	$-\Delta ABC$	10
<i>BC</i>	<i>BCDE</i>	0	ΔCDE	$-\Delta BDE$	ΔBCE	$-\Delta BCD$	0	11
<i>BC</i>	<i>BCDF</i>	0	ΔCDF	$-\Delta BDF$	ΔBCF	0	$-\Delta BCD$	12
<i>BE</i>	<i>BECA</i>	ΔBCE	$-\Delta ACE$	ΔABE	0	$-\Delta ABC$	0	13
<i>BE</i>	<i>BEFA</i>	$-\Delta BEF$	ΔAEF	0	0	$-\Delta ABF$	ΔABE	14
<i>CD</i>	<i>CDAF</i>	ΔCDF	0	$-\Delta ADF$	ΔACF	0	$-\Delta ACD$	15
<i>CD</i>	<i>CDBF</i>	0	ΔCDF	$-\Delta BDF$	ΔBCF	0	$-\Delta BCD$	16
<i>CF</i>	<i>CFDB</i>	0	ΔCDF	$-\Delta BDF$	ΔBCF	0	$-\Delta BCD$	17
<i>CF</i>	<i>CFDE</i>	0	0	ΔDEF	$-\Delta CEF$	ΔCDF	$-\Delta CDE$	18
<i>DF</i>	<i>DFAC</i>	ΔCDF	0	$-\Delta ADF$	ΔACF	0	$-\Delta ACD$	19
<i>DF</i>	<i>DFEC</i>	0	0	ΔDEF	$-\Delta CEF$	ΔCDF	$-\Delta CDE$	20
<i>EF</i>	<i>EFBA</i>	$-\Delta BEF$	ΔAEF	0	0	$-\Delta ABF$	ΔABE	21
<i>EF</i>	<i>EFBD</i>	0	ΔDEF	0	$-\Delta BEF$	ΔBDF	$-\Delta BDE$	22
<i>EF</i>	<i>EFCA</i>	$-\Delta CEF$	0	ΔAEF	0	$-\Delta ACF$	ΔACE	23
<i>EF</i>	<i>EFCD</i>	0	0	ΔDEF	$-\Delta CEF$	ΔCDF	$-\Delta CDE$	24
<i>ABCD</i>	<i>ABCD</i>	ΔBCD	$-\Delta ACD$	ΔABD	$-\Delta ABC$	0	0	25
<i>ADFE</i>	<i>ADEF</i>	ΔDEF	0	0	$-\Delta AEF$	ΔADF	$-\Delta ADE$	26
<i>BEFC</i>	<i>BCEF</i>	0	ΔCEF	$-\Delta BEF$	0	ΔBCF	$-\Delta BCE$	27

Tabelle A.7: Graph G_{64} und Matrix $K(G_{64})$

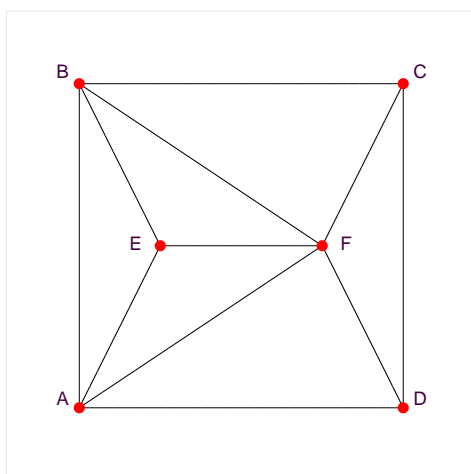
Anhang A



<i>AB</i>	<i>ABCE</i>	ΔBCE	$-\Delta ACE$	ΔABE	0	$-\Delta ABC$	0	1
<i>AB</i>	<i>ABDE</i>	ΔBDE	$-\Delta ADE$	0	ΔABE	$-\Delta ABD$	0	2
<i>AD</i>	<i>ADFB</i>	ΔBDF	$-\Delta ADF$	0	ΔABF	0	$-\Delta ABD$	3
<i>AD</i>	<i>ADFC</i>	ΔCDF	0	$-\Delta ADF$	ΔACF	0	$-\Delta ACD$	4
<i>AE</i>	<i>AEBF</i>	$-\Delta BEF$	ΔAEF	0	0	$-\Delta ABF$	ΔABE	5
<i>AF</i>	<i>AFED</i>	$-\Delta DEF$	0	0	ΔAEF	$-\Delta ADF$	ΔADE	6
<i>BC</i>	<i>BCAE</i>	ΔBCE	$-\Delta ACE$	ΔABE	0	$-\Delta ABC$	0	7
<i>BC</i>	<i>BCAF</i>	ΔBCF	$-\Delta ACF$	ΔABF	0	0	$-\Delta ABC$	8
<i>BC</i>	<i>BCDE</i>	0	ΔCDE	$-\Delta BDE$	ΔBCE	$-\Delta BCD$	0	9
<i>BC</i>	<i>BCDF</i>	0	ΔCDF	$-\Delta BDF$	ΔBCF	0	$-\Delta BCD$	10
<i>BE</i>	<i>BECA</i>	ΔBCE	$-\Delta ACE$	ΔABE	0	$-\Delta ABC$	0	11
<i>BE</i>	<i>BEFA</i>	$-\Delta BEF$	ΔAEF	0	0	$-\Delta ABF$	ΔABE	12
<i>CD</i>	<i>CDAF</i>	ΔCDF	0	$-\Delta ADF$	ΔACF	0	$-\Delta ACD$	13
<i>CD</i>	<i>CDBF</i>	0	ΔCDF	$-\Delta BDF$	ΔBCF	0	$-\Delta BCD$	14
<i>CF</i>	<i>CFDB</i>	0	ΔCDF	$-\Delta BDF$	ΔBCF	0	$-\Delta BCD$	15
<i>CF</i>	<i>CFDE</i>	0	0	ΔDEF	$-\Delta CEF$	ΔCDF	$-\Delta CDE$	16
<i>DF</i>	<i>DFAC</i>	ΔCDF	0	$-\Delta ADF$	ΔACF	0	$-\Delta ACD$	17
<i>EF</i>	<i>EFBA</i>	$-\Delta BEF$	ΔAEF	0	0	$-\Delta ABF$	ΔABE	18
<i>EF</i>	<i>EFCA</i>	$-\Delta CEF$	0	ΔAEF	0	$-\Delta ACF$	ΔACE	19
<i>ABCD</i>	<i>ABCD</i>	ΔBCD	$-\Delta ACD$	ΔABD	$-\Delta ABC$	0	0	20
<i>BEFC</i>	<i>BCEF</i>	0	ΔCEF	$-\Delta BEF$	0	ΔBCF	$-\Delta BCE$	21

Tabelle A.8: Graph G_{65} und Matrix $K(G_{65})$

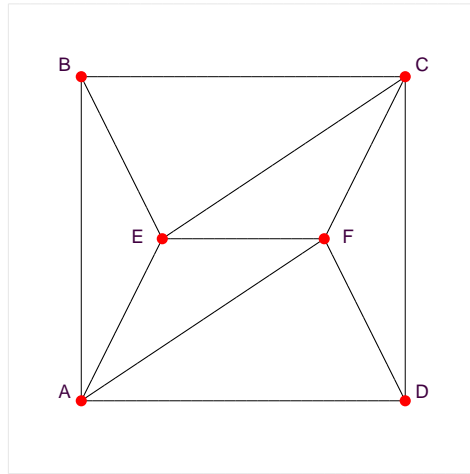
Anhang A



<i>AB</i>	<i>ABCE</i>	(ΔBCE	$-\Delta ACE$	ΔABE	0	$-\Delta ABC$	0	1
<i>AB</i>	<i>ABDE</i>		ΔBDE	$-\Delta ADE$	0	ΔABE	$-\Delta ABD$	0	2
<i>AD</i>	<i>ADFB</i>		ΔBDF	$-\Delta ADF$	0	ΔABF	0	$-\Delta ABD$	3
<i>AD</i>	<i>ADFC</i>		ΔCDF	0	$-\Delta ADF$	ΔACF	0	$-\Delta ACD$	4
<i>AE</i>	<i>AEBF</i>		$-\Delta BEF$	ΔAEF	0	0	$-\Delta ABF$	ΔABE	5
<i>AF</i>	<i>AFED</i>		$-\Delta DEF$	0	0	ΔAEF	$-\Delta ADF$	ΔADE	6
<i>BC</i>	<i>BCAF</i>		ΔBCF	$-\Delta ACF$	ΔABF	0	0	$-\Delta ABC$	7
<i>BC</i>	<i>BCDF</i>		0	ΔCDF	$-\Delta BDF$	ΔBCF	0	$-\Delta BCD$	8
<i>BE</i>	<i>BEFA</i>		$-\Delta BEF$	ΔAEF	0	0	$-\Delta ABF$	ΔABE	9
<i>BF</i>	<i>BFCE</i>		0	ΔCEF	$-\Delta BEF$	0	ΔBCF	$-\Delta BCE$	10
<i>CD</i>	<i>CDAF</i>		ΔCDF	0	$-\Delta ADF$	ΔACF	0	$-\Delta ACD$	11
<i>CD</i>	<i>CDBF</i>		0	ΔCDF	$-\Delta BDF$	ΔBCF	0	$-\Delta BCD$	12
<i>CF</i>	<i>CFDB</i>		0	ΔCDF	$-\Delta BDF$	ΔBCF	0	$-\Delta BCD$	13
<i>DF</i>	<i>DFAC</i>		ΔCDF	0	$-\Delta ADF$	ΔACF	0	$-\Delta ACD$	14
<i>EF</i>	<i>EFBA</i>		$-\Delta BEF$	ΔAEF	0	0	$-\Delta ABF$	ΔABE	15
<i>ABCD</i>	<i>ABCD</i>		ΔBCD	$-\Delta ACD$	ΔABD	$-\Delta ABC$	0	0	16

Tabelle A.9: Graph G_{66} und Matrix $K(G_{66})$

Anhang A



<i>AB</i>	<i>ABCE</i>	ΔBCE	$-\Delta ACE$	ΔABE	0	$-\Delta ABC$	0	1
<i>AB</i>	<i>ABDE</i>	ΔBDE	$-\Delta ADE$	0	ΔABE	$-\Delta ABD$	0	2
<i>AD</i>	<i>ADFB</i>	ΔBDF	$-\Delta ADF$	0	ΔABF	0	$-\Delta ABD$	3
<i>AD</i>	<i>ADFC</i>	ΔCDF	0	$-\Delta ADF$	ΔACF	0	$-\Delta ACD$	4
<i>AE</i>	<i>AEBF</i>	$-\Delta BEF$	ΔAEF	0	0	$-\Delta ABF$	ΔABE	5
<i>AF</i>	<i>AFED</i>	$-\Delta DEF$	0	0	ΔAEF	$-\Delta ADF$	ΔADE	6
<i>BC</i>	<i>BCAE</i>	ΔBCE	$-\Delta ACE$	ΔABE	0	$-\Delta ABC$	0	7
<i>BC</i>	<i>BCDE</i>	0	ΔCDE	$-\Delta BDE$	ΔBCE	$-\Delta BCD$	0	8
<i>BE</i>	<i>BECA</i>	ΔBCE	$-\Delta ACE$	ΔABE	0	$-\Delta ABC$	0	9
<i>CD</i>	<i>CDAF</i>	ΔCDF	0	$-\Delta ADF$	ΔACF	0	$-\Delta ACD$	10
<i>CD</i>	<i>CDBF</i>	0	ΔCDF	$-\Delta BDF$	ΔBCF	0	$-\Delta BCD$	11
<i>CE</i>	<i>CEFB</i>	0	$-\Delta CEF$	ΔBEF	0	$-\Delta BCF$	ΔBCE	12
<i>CF</i>	<i>CFDE</i>	0	0	ΔDEF	$-\Delta CEF$	ΔCDF	$-\Delta CDE$	13
<i>DF</i>	<i>DFAC</i>	ΔCDF	0	$-\Delta ADF$	ΔACF	0	$-\Delta ACD$	14
<i>EF</i>	<i>EFCA</i>	$-\Delta CEF$	0	ΔAEF	0	$-\Delta ACF$	ΔACE	15
<i>ABCD</i>	<i>ABCD</i>	ΔBCD	$-\Delta ACD$	ΔABD	$-\Delta ABC$	0	0	16

Tabelle A.10: Graph G_{67} und Matrix $K(G_{67})$

B Wissenschaftlicher Kontext

Eine Matrix K_1 über der Kantenmenge $E(G)$ eines Graphen G wurde erstmals verwendet in der Untersuchung von MARLIN und TOUSSAINT [9]. Wir wollen das in deren Arbeit gestellte geometrische Problem skizzieren, wozu noch einige zusätzliche Definitionen benötigt werden.

Definition B.0.1. (Streng konvexes ebenes k -gon.)¹

Ein streng konvexes ebenes k -gon (k -Eck) P , $k \geq 3$, ist die konvexe Hülle von k Punkten $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^2$, $v_i = (x_i, y_i)^T$, $i = 1, \dots, k$:

$$P = \text{conv}(\{v_1, v_2, \dots, v_k\}), \quad (\text{B.1})$$

wobei zusätzlich für alle $v \in \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ gilt

$$v \notin \text{conv}(\{v_1, v_2, \dots, v_k\} - v). \quad (\text{B.2})$$

Die Punkte v_i , $i = 1, \dots, k$, heißen Ecken von P . Ist die Eckenzahl k von P von untergeordneter Bedeutung, so nennen wir P Polygon. Wir bezeichnen die Menge der Knoten bzw. Kanten von P mit $V(P)$ bzw. $E(P)$.

Definition B.0.2. (Diagonale eines streng konvexen ebenen Polygons [2].)

Sei P ein streng konvexes ebenes Polygon mit $k \geq 4$ Ecken, gegeben durch die Menge seiner Ecken $V(P) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, $v_i = (x_i, y_i)^T$, $i = 1, \dots, k$. Eine Diagonale $d = d(w_1, w_2)$ ist eine zwei nichtadjazente Ecken $V(P) \ni w_1, w_2$ von P verbindende Strecke.

Definition und Bemerkung B.0.3. (Diagonale Triangulierung eines Polygons [2].)

Seien $P, V(P)$ wie in Definition B.0.2. Eine diagonale Triangulierung $T = \{d_1, d_2, \dots, d_t\}$ von P , ist eine Menge von überkreuzungsfreien und paarweise verschiedenen Diagonalen von P , so daß alle Innengebiete des Graphen $G := (V(G), E(G))$, $V(G) := V(P)$, $E(G) := E(P) + T$, Dreiecke sind.

Es gilt $|T| = |V(P)| - 3$ und damit $|E(G)| = 2|V(P)| - 3$, $|F(G)| = |V(P)| - 1$.

Vereinbarung. Wir nehmen im folgenden an, daß die Ecken von P zyklisch indiziert seien, das heißt, v_i, v_{i+1} , $i = 1, \dots, k - 1$, sind adjazent, und v_1 und v_k sind adjazent.

Definition B.0.4. (Geschlossener räumlicher Polygonzug [2].)

Ein geschlossener räumlicher Polygonzug $\bar{P} = (\bar{v}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k = \bar{v}_0)$ ist die Menge

$$\mathbb{R}^3 \supseteq \bar{P} := \{ \bar{v}_i = (x_i, y_i, z_i)^T \} \cup \{ \lambda \bar{v}_{i-1} + (1 - \lambda) \bar{v}_i \mid 0 < \lambda < 1 \}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (\text{B.3})$$

¹ Ein streng konvexes ebenes k -gon P kann aufgefaßt werden als die ebene Darstellung Γ eines Kreisgraphen: $P = \Gamma(C_k)$, $k \geq 3$.

B.1 Problemstellung bei Marlin und Toussaint [9]

Seien $\mathcal{P} := \{P \mid P \text{ ist ein streng konvexes ebenes } k\text{-Eck, } k \geq 4\}$ und $P \in \mathcal{P}$ mit Eckenmenge $V(P)$ und Kantenmenge $E(P)$,

$$\begin{aligned} V(P) &= \{v_1, v_2, \dots, v_k\}, \quad v_i = (x_i, y_i)^T, \quad i = 1, \dots, k, \\ E(P) &= \{\lambda v_i + (1 - \lambda)v_{i+1} \mid i = 1, \dots, (k - 1)\} \cup \{\lambda v_k + (1 - \lambda)v_1\}, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$0 \leq \lambda \leq 1$. Seien $\bar{\mathcal{P}}, \mathcal{P}'$ die Mengen

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}} &:= \{\bar{P} \mid \bar{P} \text{ ist ein geschlossener räumlicher Polygonzug}\}, \\ \mathcal{P}' &:= \{P' \in \bar{\mathcal{P}} \mid \forall v'_i = (x_i, y_i, z_i)^T \in V(P') : z_i = 0\}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Wir betrachten die Abbildungen ι und ν ,

$$\begin{aligned} \iota : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P}', \\ v_i = (x_i, y_i)^T &\mapsto v'_i = (x_i, y_i, 0)^T, \quad v_i \in V(P), \\ \lambda v_i + (1 - \lambda)v_{i+1} &\mapsto \lambda v'_i + (1 - \lambda)v'_{i+1}, \quad i = 1, \dots, k - 1, \\ \lambda v_k + (1 - \lambda)v_1 &\mapsto \lambda v'_k + (1 - \lambda)v'_1, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{P}' &\longrightarrow \bar{\mathcal{P}}, \\ v'_i = (x_i, y_i, 0)^T &\mapsto \bar{v}_i = (x_i, y_i, z_i)^T, \quad v'_i \in V(P'), \\ \lambda v'_i + (1 - \lambda)v'_{i+1} &\mapsto \lambda \bar{v}_i + (1 - \lambda)\bar{v}_{i+1}, \quad i = 1, \dots, k - 1, \\ \lambda v'_k + (1 - \lambda)v'_1 &\mapsto \lambda \bar{v}_k + (1 - \lambda)\bar{v}_1, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$0 \leq \lambda \leq 1$. Anschaulich gesprochen, ordnen wir durch ι jeder Ecke von $P \in \mathcal{P}$ die z -Koordinate 0 zu und erhalten den geschlossenen räumlichen Polygonzug $P' = \iota(P)$. In einem zweiten Schritt variieren wir die "Höhe" der Ecken und erhalten so einen geschlossenen räumlichen Polygonzug $\bar{P} = \nu(P') = (\nu \circ \iota)(P)$.

Vereinbarung. Wir sagen, \bar{P} geht hervor aus P durch *Variation der z -Koordinaten*.

Satz B.1.1. (Konvexe Hülle von \bar{V} [2].)

Sei $\bar{P} = (\bar{v}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k = \bar{v}_0)$ ein geschlossener räumlicher Polygonzug, hervorgegangen durch Variation der z -Koordinaten aus einem streng konvexen ebenen Polygon P mit zyklisch numerierter Eckenmenge $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, sei $\bar{V} := \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$, und die Punkte $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$ liegen nicht alle in einer Ebene. Dann gilt:

1. $Q := \text{conv}(\bar{V})$ ist ein konvexes 3-Polyeder.
2. Alle Facetten von Q sind Dreiecke.
3. Die orthogonale Projektion der Ecken und Kanten von Q auf die xy -Ebene ergibt eine Konfiguration (P, T_1, T_2) , bestehend aus dem ebenen Polygon P und zwei kantendisjunkten diagonalen Triangulierungen T_1 und T_2 von P .

Sei jetzt umgekehrt eine Konfiguration (P, T_1, T_2) , bestehend aus einem streng konvexen ebenen Polygon und zwei kantendisjunkten diagonalen Triangulierungen von P gegeben. Dann kann gefragt werden, ob (P, T_1, T_2) die orthogonale Projektion eines konvexen 3-Polyeders Q ist. In diesem Fall heißt (P, T_1, T_2) *realisierbar*, und Q ist eine *Realisierung* der Konfiguration (P, T_1, T_2) .

Frage. Gibt es zu einer gegebenen Konfiguration (P, T_1, T_2) ein k -Tupel $z = (z_1, \dots, z_k)$, so daß $Q = \text{conv}(\bar{V})$, $\bar{V} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$, $\bar{v}_i = (v_i, z_i)^T$, $v_i \in V(P)$, $i = 1, \dots, k$, ein konvexes Polyeder ist und die Projektion der Ecken und Kanten von Q auf die xy -Ebene gerade der Konfiguration (P, T_1, T_2) entspricht?

GUIBAS [10] vermutete, daß jede Konfiguration (P, T_1, T_2) realisierbar sei. Diese Vermutung wurde von DEKSTER [2] durch Angabe eines Gegenbeispiels widerlegt. MARLIN und TOUSSAINT [9] fragen, wie eine vorgelegte Konfiguration (P, T_1, T_2) auf ihre Realisierbarkeit hin untersucht werden kann. Sie verwenden dafür die aus der Betrachtung der Kanten $e \in E := E(P) \cup T_1 \cup T_2$ und der zugehörigen Ungleichungen der Form (Δ_1) hervorgehende Matrix K_1 .²

Satz B.1.2. (Realisierbarkeit einer Konfiguration [9].)

Die Konfiguration (P, T_1, T_2) ist genau dann realisierbar, wenn ein z existiert mit

$$K_1 z > 0. \tag{B.8}$$

B.2 Vergleich

Das in der vorliegenden Arbeit behandelte Problem verwendet gleichfalls die von MARLIN und TOUSSAINT [9] eingesetzte Matrix K_1 , die durch Betrachtung der Kantenmenge $E(G)$ ermittelt wird.

Allerdings gibt es zu einem planaren 3-zusammenhängenden Graphen nach dem Satz von STEINITZ (Satz 2.2.2) immer eine Realisierung als konvexes 3-Polyeder. Während sich die Arbeit [9] mit einem Prüfkriterium für die Existenz einer Realisierung Q befaßt, stellten wir in unserer Arbeit die Frage, wie diese (immer existierende) Realisierung durch das Ungleichungssystem $\begin{bmatrix} K_1 z > 0 \\ K_0 z = 0 \end{bmatrix}$ charakterisiert werden kann. In der Tabelle B.1 ist unsere Problemstellung einem Vergleich mit dem Problem in [9] unterzogen.

² Da das Polyeder Q in [9] ausschließlich dreieckige Facetten besitzt, resultiert für jede Kante von (P, T_1, T_2) genau eine Ungleichung. Es folgt ferner, daß K_0 leer ist.

	Marlin und Toussaint [9]	vorliegendes Problem
Eingabedaten	Konfiguration (P, T_1, T_2) , bestehend aus einem streng konvexen Polygon P und zwei kantendisjunkten diagonalen Triangulierungen T_1, T_2 von P	3-zusammenhängender planarer Graph G , gegeben durch eine konvexe Einbettung $\Gamma(G)$
Realisierung	Konvexes 3-Polyeder Q mit dreieckigen Facetten	Konvexes 3-Polyeder Q mit k -eckigen Facetten ($k \geq 3$)
Sicht aus dem negativen Halbraum	(P, T_1)	Komplement des Außengebietes von G
Sicht aus dem positiven Halbraum	(P, T_2)	$\Gamma(G)$
Fragestellung	Ist K realisierbar? ($\Leftrightarrow \exists z : K_1 z > 0$)	Charakterisierung der z -Koordinaten von $V(Q)$ durch die Matrix K
Existiert eine Realisierung?	Nicht immer.	Ja, immer.
Methode	Betrachtung der Menge $E := E(P) \cup T_1 \cup T_2$, Ungleichungssystem $K_1 z > 0$	Betrachtung der Mengen $E(G)$ und $F_4(G)$, Ungleichungssystem $\begin{bmatrix} K_1 z > 0 \\ K_0 z = 0 \end{bmatrix}$

Tabelle B.1: Vergleich des vorliegenden Problems mit [9]

C Knoten vom Grad 3 in triangulierten Graphen

Wir haben in Satz 3.3.5 in Abschnitt 3.3 gesehen, daß ein Knoten A vom Grad 3 eines triangulierten Graphen $G \neq K_4$ ausschließlich Nachbarknoten vom Grad ≥ 4 besitzt. Wir suchen jetzt nach einer Abschätzung für die Zahl der Knoten vom Grad 3.

Wir betrachten einen triangulierten Graphen G mit $n \geq 5$ Knoten, gegeben durch eine konvexe Einbettung Γ , und ein zugehöriges 3-Polyeder Q . Alle Gebiete von G sind nichtentartete Dreiecke, und G besitzt mit der EULERSchen Polyederformel (2.8) genau $2(n - 2)$ Gebiete und genau $3(n - 2)$ Kanten. Ist $A \in V(G)$ ein Knoten mit $\deg A = 3$ und Nachbarschaft $N(A) = \{B, C, D\}$, so gilt für die Kantenmenge $E(T)$ des Simplex' $T := T^3(A, B, C, D)$ und die Kantenmenge $E(Q)$ des zu G gehörigen Polyeders Q :

$$E(T) \cap E(Q) = E(T). \quad (\text{C.1})$$

Satz C.0.1. (Charakterisierung 3-zusammenhängender Graphen [3].)

Ein Graph ist genau dann 3-zusammenhängend, wenn für alle $u \neq v \in V(G)$ (mindestens) drei knotendisjunkte u - v -Wege in G existieren.

Lemma C.0.2. (Entfernung von Knoten und 3-Zusammenhang.)

Sei G ein 3-zusammenhängender (nicht notwendig triangulierter) Graph mit $n \geq 5$ Knoten, sei A ein Knoten vom Grad 3 mit Nachbarschaft $N(A) = \{B, C, D\}$. Gilt

$$\{BC, BD, CD\} \subseteq E(G), \quad (\text{C.2})$$

so ist der Graph $G - A$ ebenfalls 3-zusammenhängend.

Beweis. Wir verwenden Satz C.0.1 und führen eine Fallunterscheidung durch: Entweder sind die Knoten u, v beide in $\{B, C, D\}$ oder nur einer von beiden oder keiner von beiden.

1. Seien ohne Beschränkung $u = B, v = C$. Dann gibt es mindestens 4 u - v -Wege in G : (B, C) , (B, A, C) , (B, D, C) und noch einen vierten Weg, der weder über A noch D verläuft, denn G ist zusammenhängend und $G \neq K_4$.
2. Seien $u = B$ und $v \in G - \{A, B, C, D\}$. Führt der u - v -Weg über A , dann führt er über (mindestens) einen der Knoten C oder D . Im Graphen $G - A$ korrespondiert derjenige Weg P' zu diesem Weg P in G , der den Knoten A nicht mehr enthält, ansonsten aber mit P identisch ist. Führt der u - v -Weg nicht über A , so existiert derselbe Weg auch in $G - A$.

3. Sind $u, v \in G - \{A, B, C, D\}$, so gilt analog zu **2**: Ein u - v -Weg, der A nicht enthält, existiert auch in $G - A$. Ein über A verlaufender Weg P in G verläuft über mindestens zwei Knoten aus $\{B, C, D\}$ und korrespondiert zu einem Weg P' in $G - A$, der den Knoten A nicht enthält, sonst aber identisch ist mit P .

□

C.1 Ein Algorithmus

Sei jetzt G ein triangulierter Graph mit $n \geq 5$ Knoten. Die obige Argumentation liefert einen Algorithmus, bei dem wir sukzessiv Knoten vom Grad 3 löschen.

Sei $G := G^0$. Hat G keinen Knoten vom Grad 3, so ist nichts zu tun. Anderenfalls wählen wir einen Knoten $w \in V(G)$ mit $\deg w = 3$, den wir löschen, und erhalten den Graphen $G^{-1} := G^0 - w$, der wiederum 3-zusammenhängend ist. Ist $G^{-1} = K_4$ oder enthält G^{-1} keinen weiteren Knoten vom Grad 3, endet der Algorithmus, sonst wiederholen wir die beschriebene Operation.

In endlich vielen Schritten erhalten wir einen Graphen G^{-k} , dessen Knoten sämtlich vom Grad 4 oder höher sind, oder $G^{-k} = K_4$. Mittels dieses Algorithmus ergibt sich eine Folge $(G^{-k}, G^{-(k-1)}, \dots, G^{-2}, G^{-1}, G^0 = G)$ von 3-zusammenhängenden triangulierten Graphen, und für $i = -(k-1), \dots, 0$ gilt:

$$\begin{aligned} |V(G^i)| &= |V(G^{i-1})| + 1, \\ |E(G^i)| &= |E(G^{i-1})| + 3, \\ |F(G^i)| &= |F(G^{i-1})| + 2. \end{aligned} \tag{C.3}$$

C.2 Umgekehrter Algorithmus

Um die Frage zu beantworten, wieviele Knoten vom Grad 3 der Graph G höchstens besitzt, gehen wir jetzt den umgekehrten Weg: Ein Gebiet $v_1v_2v_3 \in F(G)$ wird durch Einfügen des Knotens w und der Kanten v_1w, v_2w, v_3w in drei Gebiete geteilt.

Definition C.2.1. (Unterteilung von f , Unterteilung von G .)

Sei $G = G^0$ ein triangulierter Graph, sei $f \in F(G)$ ein Gebiet von G mit den Randknoten v_1, v_2, v_3 . Durch Einfügen eines Knotens w im Inneren von $\Gamma(f)$ und Einfügen der (geradlinigen) Kanten v_1w, v_2w, v_3w erhalten wir den Graphen

$$G^1 := G + w + \{v_1w, v_2w, v_3w\}. \tag{C.4}$$

Anhang C

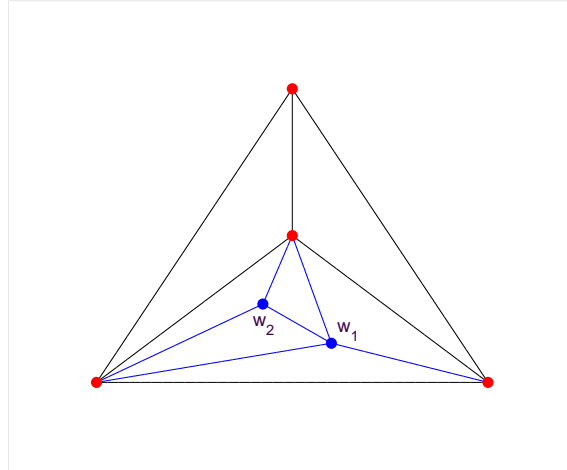


Abbildung C.1: Aus $G^0 = K_4$ durch Unterteilung hervorgegangener Graph G^2

Wir wollen diese Operation für die vorliegende Betrachtung bezeichnen als Unterteilung von f . Iterieren wir die Operation der Unterteilung k -mal, so erhalten wir eine Folge (G^0, G^1, \dots, G^k) 3-zusammenhängender triangulierter Graphen, und für $i = 1, \dots, k$ gilt

$$\begin{aligned} |V(G^i)| &= |V(G^{i-1})| + 1, \\ |E(G^i)| &= |E(G^{i-1})| + 3, \\ |F(G^i)| &= |F(G^{i-1})| + 2. \end{aligned} \tag{C.5}$$

Wir sagen, G^k ist entstanden aus G^0 durch k -malige Unterteilung.

Beispiel C.2.2. Abbildung C.1 zeigt einen durch zweimalige Unterteilung aus $G^0 = K_4$ hervorgegangenen Graphen G^2 .

Vereinbarung. Mit den Darlegungen in Abschnitt C.1 können wir im folgenden annehmen, daß $G = G^0$ entweder der K_4 ist oder ein Graph mit ausschließlich Knoten vom Grad 4 oder höher.

Lemma C.2.3. (Knoten vom Grad 3 in $(K_4 = G^0, G^1, \dots, G^k)$.)

Sei $G^0 = K_4$, sei (G^0, G^1, \dots, G^k) eine Folge von durch Unterteilung erzeugten Graphen.

1. Jedes Gebiet f von G^0 besitzt genau 3 Knoten vom Grad 3.
2. Jedes Gebiet f von G^1 besitzt genau einen Knoten vom Grad 3.
3. Jedes Gebiet f von G^k ($k \geq 1$) besitzt höchstens einen Knoten vom Grad 3.

Beweis.

1. Dies folgt aus Betrachtung des Graphen K_4 .
2. G^1 entsteht aus G^0 durch Unterteilung eines Gebietes $f \in F(G^0)$. Da jedes Gebiet von G^0 genau drei Knoten vom Grad 3 besitzt, ist die Auswahl des Gebietes beliebig. Der G^1 entspricht kombinatorisch dem in unserer Arbeit als G_{52} bezeichneten Graphen. $G^1 = G_{52}$ hat sechs Gebiete, und jedes Gebiet $f \in F(G^1)$ besitzt genau einen Knoten vom Grad 3 und zwei Knoten vom Grad 4.
3. Für $k = 1$ ist die Behauptung bereits in **2** gezeigt. Sei $k = 2$. Der Graph G^2 entsteht durch Unterteilung eines Gebietes $f \in F(G^1)$. Da jedes Gebiet von G^1 einen Knoten vom Grad 3 und zwei Knoten vom Grad 4 besitzt, ist die Auswahl des Gebietes wiederum beliebig. Wir erhalten $G^2 = G_{62}$. Dieser Graph besitzt 8 Gebiete $f = v_1v_2v_3$, und zwar

$$\begin{aligned} & 4 \text{ Gebiete mit } d(f) = (3, 4, 5), \\ & 2 \text{ Gebiete mit } d(f) = (3, 5, 5), \\ & 2 \text{ Gebiete mit } d(f) = (4, 4, 5), \end{aligned}$$

$d(f) := (\deg v_1, \deg v_2, \deg v_3)$. Jedes Gebiet besitzt also höchstens einen Knoten vom Grad 3. Sei jetzt $k \geq 2$.

- a) Sei $f = v_1v_2v_3 \in F(G^k)$ mit $d(f) = (3, d_2, d_3)$, $d_2, d_3 \geq 4$. Wir unterteilen f durch Einfügen eines Knotens w und der Kanten v_1w, v_2w, v_3w . Der Knoten v_1 gehört in G^k zu drei Gebieten f, f', f'' und ist in diesen Gebieten jeweils der einzige Knoten vom Grad 3. Einfügen von v_1w erhöht seinen Grad um 1: $\deg v_1 = 4$ in G^{k+1} . Die Gebiete f' und f'' haben keinen Knoten vom Grad 3 in G^{k+1} . Die Knoten v_2 und v_3 gehören d_2 bzw. d_3 Gebieten an. Sei

$$\bar{F} = \{ \bar{f} \in F - f \mid v_2 \in \bar{f} \text{ oder } v_3 \in \bar{f} \} \subseteq F(G^k). \quad (\text{C.6})$$

Hat $\bar{f} \in \bar{F}$ genau einen Knoten vom Grad 3 in G^k , so auch in G^{k+1} . Hat \bar{f} keinen Knoten vom Grad 3 in G^k , so hat \bar{f} auch keinen Knoten vom Grad 3 in G^{k+1} . Das Gebiet $f \in F(G^k)$ verschwindet durch die Unterteilung, und an seine Stelle treten in G^{k+1} drei Gebiete mit jeweils genau einem Knoten vom Grad 3, nämlich dem Knoten w .

- b) Gilt $d(f) = (d_1, d_2, d_3)$, $d_i \geq 4$, $i = 1, 2, 3$, so entstehen durch Unterteilung von f genau drei Gebiete in G^{k+1} mit jeweils genau einem Knoten vom Grad 3. Der Knotengrad der Knoten v_1, v_2, v_3 erhöht sich jeweils um eins. Alle Gebiete $f' \in F(G^k) - f$ mit einem Grad-3-Knoten haben auch in G^{k+1} genau einen Knoten vom Grad 3, alle Gebiete $f' \in F(G^k) - f$ ohne Knoten vom Grad 3 haben auch in G^{k+1} keinen Knoten vom Grad 3.

□

Anhang C

Korollar C.2.4. (Knoten vom Grad 3 in (G^0, G^1, \dots, G^k) .)

Ist G^k durch Unterteilung aus G^0 hervorgegangen, und ist G^0 ein Graph ohne Knoten vom Grad 3, oder ist $G^0 = K_4$ und $k \geq 1$, so besitzt jedes Gebiet von G^k höchstens einen Knoten vom Grad 3.

Beweis. Dies folgt mit dem Beweis von Lemma C.2.3, 3. □

Satz C.2.5. (Anzahl der Knoten vom Grad 3 in einem triangulierten Graphen.)

Sei $G = G^0$ ein triangulierter Graph, sei G^k ein durch k -malige Unterteilung von G^0 entstandener Graph. Sei $V(G^k) := V_3(G^k) + V_4(G^k)$ die Knotenmenge von G^k ,

$$\begin{aligned} V_3(G^k) &:= \{v \in V(G^k) \mid \deg v = 3\}, \\ V_4(G^k) &:= \{v \in V(G^k) \mid \deg v \geq 4\}, \end{aligned} \tag{C.7}$$

seien $n^{(k)} := |V(G^k)|$, $n_3^{(k)} := |V_3(G^k)|$.

1. Ist $G^0 = K_4$, und ist $k \geq 1$, so gilt $2 \leq n_3^{(k)} < \lfloor \frac{2}{3}n^{(k)} \rfloor$.

2. Besitzt G^0 nur Knoten vom Grad 4 oder höher, so gilt $0 \leq n_3^{(k)} < \lfloor \frac{2}{3}n^{(k)} \rfloor$.

Beweis.

1. a) $k = 1, 2$. Im Beweis des Lemmas C.2.3 sahen wir: $G^1 = G_{52}$, $G^2 = G_{62}$. Diese beiden Graphen haben jeweils genau zwei Knoten vom Grad 3. Sei $k \geq 2$. Ist $f \in F(G^k)$ mit $d(f) = (3, d_2, d_3)$, und unterteilen wir f , so gilt $n_3^{(k+1)} = |V_3(G^{k+1})| = |V_3(G^k)| = n_3^{(k)}$. Ist $f \in F(G^k)$ mit $d(f) = (d_1, d_2, d_3)$, $d_i \geq 4$, $i = 1, 2, 3$, so gilt $n_3^{(k+1)} = n_3^{(k)} + 1$. Die Anzahl der Knoten vom Grad 3 kann sich also höchstens erhöhen, aber niemals niedriger als 2 werden.

b) Mit Lemma C.2.3, 3, enthält jedes Gebiet höchstens einen Knoten vom Grad 3. Ist $n_3^{(k)} = |V_3(G^k)|$, so besitzt G^k genau $3n_3^{(k)}$ Gebiete mit genau einem Knoten vom Grad 3. G^k besitzt genau $2(n^{(k)} - 2)$ Gebiete, also höchstens

$$\frac{2}{3}(n^{(k)} - 2) = \frac{2}{3}n^{(k)} - \frac{4}{3} < \frac{2}{3}n^{(k)} - 1 < \left\lfloor \frac{2}{3}n^{(k)} \right\rfloor \tag{C.8}$$

Knoten vom Grad 3.

2. Dies folgt aus Korollar C.2.4 und der Ungleichung (C.8) in 1.b. □

Beispiel C.2.6. Abbildung C.2 zeigt einen aus $G^0 = G_{63}$ durch 8-malige Unterteilung hervorgegangenen Graphen $\bar{G} = G^8$. Jedes Gebiet von \bar{G} besitzt genau einen Knoten vom Grad 3. \bar{G} besitzt genau $8 (< \lfloor \frac{2}{3}n^{(8)} \rfloor = 9)$ Knoten vom Grad 3.

Anhang C

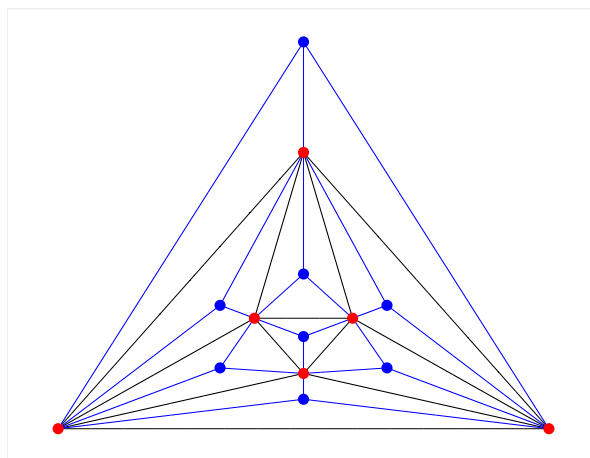


Abbildung C.2: $\bar{G} = G^8$, entstanden aus $G^0 = G_{63}$ durch 8-malige Unterteilung

Literaturverzeichnis

- [1] Ilja N. Bronstein, Konstantin A. Semendjajew, Gerhard Musiol, Heiner Mühlig: *Taschenbuch der Mathematik*. Frankfurt am Main 2000 (5. Auflage).
- [2] Boris V. Dekster: Convex hulls of spatial polygons with a fixed convex projection. *Contributions to Algebra and Geometry* 36(1) (1995) 123-134. [B.0.2](#), [B.0.3](#), [B.0.4](#), [B.1.1](#), [B.1](#)
- [3] Reinhard Diestel: *Graphentheorie*. Berlin 2006 (3. Auflage). [2](#), [1](#), [C.0.1](#)
- [4] Vladimir A. Emeličev, Michail M. Kovalev, Michail K. Kravcov: *Polyeder, Graphen, Optimierung*. Berlin 1985. [2.2](#), [2.2.1](#), [2.2.2](#)
- [5] Sönke Fleßner: *Über die Realisierung zweier Triangulierungen konvexer Polygone als 3-Polytope*. Bachelor-Arbeit, FernUniversität in Hagen, 2006.
- [6] Alfred Göpfert (Hrsg.): *Lexikon der Optimierung*. Berlin 1986. [3.5.1](#)
- [7] Jonathan L. Gross, Thomas W. Tucker: *Topological Graph Theory*. New York 1987. [2.1.2](#), [2.1.3](#), [2.1.4](#)
- [8] Branko Grünbaum: *Convex Polytopes*. New York 2003 (2. Auflage). [1.1](#), [2.2](#), [2.2.1](#), [2.2.2](#), [1](#), [3.2](#)
- [9] Benjamin Marlin, Godfried Toussaint: Constructing convex 3-polytopes from two triangulations of a polygon. *Computational Geometry* 28 (2004) 41-47. ([document](#)), [1.1.2](#), [1.3](#), [1.2](#), [B](#), [B.1](#), [B.1](#), [B.1.2](#), [B.2](#), [2](#), [B.1](#)
- [10] William O. J. Moser: Problems, problems, problems. *Discrete Applied Mathematics* 31 (1991) 201-225. [B.1](#)
- [11] Holger P. Petersson: *Lineare Optimierung*. Kurs 1212 der FernUniversität in Hagen, 2002. [2.2](#), [2.2](#)
- [12] Ulrich Seip: *Graphentheorie*. Kurs 1306 der FernUniversität in Hagen, 2002. [2.1](#), [1](#), [3.2](#)
- [13] Günter M. Ziegler: *Lectures on Polytopes*. New York 1995. [1.1](#), [2](#), [2.2.1](#), [2.2.2](#), [3.2](#)