

Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine
Univ.-Prof. Dr. Hermann Singer
Dipl.-Stat. Anja Bittner
Sebastian Förster, M.Sc.

Modul 32741

Vertiefung der Wirtschafts- mathematik und Statistik

Leseprobe

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie der Übersetzung und des Nachdrucks, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (Druck, Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung der FernUniversität reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Vertiefung der Analysis und Linearen Algebra

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

1.2 Determinanten

1.2.1 Einführung von Determinanten

Eine Matrix kann durch verschiedene Kennzahlen charakterisiert werden. Für jede Matrix kann z.B. der Rang angegeben werden, welcher der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen bzw. Spalten entspricht.

Grundlagen 1.8. (Rang einer Matrix) [G: 5.2.3]

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren bzw. Zeilenvektoren einer Matrix \mathbf{A} heißt **Rang der Matrix \mathbf{A}** und wird mit $\text{rg}(\mathbf{A})$ bezeichnet.

Die sogenannte Determinante ist eine weitere Kennzahl, welche jedoch nur für quadratische Matrizen existiert. Mit Hilfe der Determinante lässt sich z.B. prüfen, ob eine quadratische Matrix invertierbar ist. Gegebenenfalls kann dann die Inverse der Matrix bestimmen werden. Darüber hinaus bildet die Determinante eine wichtige Grundlage für die Lösung von Eigenwertproblemen (vgl. Abschnitt 1.3) bei quadratischen Matrizen sowie für die Differentialrechnung von reellen Funktionen mehrerer Variablen (vgl. Einheit 2).

Für jede quadratische Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die n -reihige **Determinante** von \mathbf{A} definiert durch

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}.$$

Bei der Determinante von \mathbf{A} handelt es sich um eine reelle Zahl. Für den Fall $n = 1$ wird üblicherweise $\det(a_{11})$ anstelle von $|a_{11}|$ geschrieben, um eine klare Unterscheidung von den Betragsstrichen zu gewährleisten. Es gilt $\det(a_{11}) = a_{11}$ für alle $a_{11} \in \mathbb{R}$, also z.B. $\det(-4) = -4$.

Auf einen wichtigen Zusammenhang zwischen einer quadratische Matrix und ihrer Determinante sei bereits an dieser Stelle hingewiesen: Die Existenz einer Inversen kann mit Hilfe der Determinante überprüft werden.

Eine (n, n) -Matrix \mathbf{A} ist genau dann **invertierbar (regulär)**, wenn ihre Determinante ungleich Null ist: $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Folglich gilt im Fall $\det \mathbf{A} \neq 0$ unmittelbar $\text{rg}(\mathbf{A}) = n$. Mit Hilfe der Determinante lässt sich somit ebenfalls prüfen, ob Vektoren linear unabhängig sind.

1.2.2 Berechnung von Determinanten

Wie die Determinante von einer quadratischen Matrix berechnet wird, wird in diesem Abschnitt zunächst für eine 2-reihige, dann für eine 3-reihige und schließlich allgemein für eine n -reihige Determinante gezeigt.

Die 2-reihige Determinante

Die Berechnung der Determinante für (2,2)-Matrizen ergibt sich aus der Differenz des Produkts der Elemente in der Hauptdiagonalen und des Produkts der Elemente in der Nebendiagonalen.

Für die Determinante einer (2,2)-Matrix \mathbf{A} gilt:

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Beispiel 1.1

- a) Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Für die Determinante gilt:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 1.$$

Somit hat die Matrix \mathbf{A} einen vollen Rang $rg(\mathbf{A}) = 2$ und ist invertierbar.

- b) Die Matrix $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist nicht regulär, d.h. nicht invertierbar, denn für die Determinante gilt:

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0.$$

 L-13

Bestimmen Sie den Rang der Matrix \mathbf{B} (vgl. [G: 5.2.3]). Was fällt Ihnen auf?

- c) Gegeben sei die Matrix $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Für die Determinante gilt:

$$\det \mathbf{C} = \begin{vmatrix} a & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = a \cdot 6 - 3 \cdot 2 = a \cdot 6 - 6.$$

Somit ist die Matrix \mathbf{C} für $a \neq 1$ invertierbar, denn es gilt:

$$\det \mathbf{C} = 0 \quad \iff \quad a \cdot 6 - 6 = 0 \quad \iff \quad a = 1.$$

Lösung Übung 1.4 auf S. 20:

a) Die 4-reihige Determinante lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 1 \\ 8 & 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{(I.)}{=} -2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 8 & 9 & 1 \\ 8 & 7 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} | \cdot (-2) \\ | \cdot (-2) \end{array} \right\} + \\ \left. \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right\} + \end{array}$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(II.)}{=} -2 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 \cdot 6 = -48.$$

Dabei erfolgt in Schritt (I.) die Entwicklung nach der zweiten Zeile oder dritten Spalte und in Schritt (II.) die Entwicklung nach der ersten Spalte.

b) Die 5-reihige Determinante lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Dabei werden die erste und die fünfte Zeile sowie die zweite und die vierte Zeile vertauscht. Diese zwei Vertauschungen führen zu dem Faktor $(-1)^2$. Für die Determinante einer Einheitsmatrix gilt stets $\det(\mathbf{E}_n) = 1$.

Lösung Übung 1.5 auf S. 20:

Nach dem Laplace'schen Entwicklungssatz gilt:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ - & + & - & + \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ + & - & + & - \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ - & + & - & + \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}_{=0} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$- 1 \cdot \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$- 1 \cdot \left(-1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

2.2 Zulässige Lösungen linearer Programme

Die Menge der zulässigen Lösungen eines linearen Programms weist einige Besonderheiten auf. So ist der Zulässigkeitsbereich X eines LPs konvex und besitzt sogenannte Ecken. Was diese Eigenschaften beinhalten und warum diese zur Bestimmung einer optimalen Lösung eines LPs von Bedeutung sind, ist Gegenstand dieses Kapitels.

2.2.1 Konvexer Zulässigkeitsbereich

Der *Zulässigkeitsbereich* eines LPs kann äquivalent zur komprimierten Matrix-
Zulässigkeitsbereich
schreibweise in (2.3) auf Seite 57 auch geschrieben werden als:

$$X = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m \\ x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{array} \right. \right\}. \quad (2.8)$$

Zulässig sind demnach alle nichtnegativen Vektoren \mathbf{x} , die jeder der m Nebenbedingungen genügen. Diese Vektoren $\mathbf{x} \in X$ heißen *zulässige Lösungen von*
zulässige Lösung
 X . Für die Lösungen müssen alle m Ungleichungen simultan und nicht nur einzelne Ungleichungen erfüllt sein. Graphisch kann diese Bedingung am Zulässigkeitsbereich eines LPs mit zwei Variablen veranschaulicht werden. Hierzu wird das Beispiel 2.1 erneut aufgegriffen.

Beispiel 2.5

Der Zulässigkeitsbereich für Beispiel 2.1, bei welchem zwei Produkte P1 und P2 herzustellen sind, lautet:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 180 \quad \text{(MI)} \\ x_1 + 2x_2 \leq 240 \quad \text{(MII)} \\ 2x_2 \leq 180 \quad \text{(MIII)} \\ x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{(NNB)} \end{array} \right. \right\}.$$

Gemäß dieser Darstellungsweise durchlaufen die beiden Produkte zunächst Maschine MI und dann Maschine MII. Produkt P2 durchläuft schließlich noch Maschine MIII. Es sind alle drei Nebenbedingungen zu berücksichtigen, da sonst die begrenzte Kapazität einer Maschine vernachlässigt wird.

Der Zulässigkeitsbereich der beiden Variablen x_1 und x_2 kann in einem entsprechenden Koordinatensystem graphisch dargestellt werden. Dazu werden in Abbildung 2.2 schrittweise die einzelnen Nebenbedingungen ergänzt. Aufgrund der NNB ist nur der erste Quadrant des Koordinatensystems zu betrachten (links oben). Einzeichnen der Restriktion MI schränkt die Menge der zulässigen Lösungen bereits

deutlich ein (rechts oben). Wie die beiden Nebenbedingungen für MII und MIII diese Menge noch weiter eingrenzen, zeigen die unteren beiden Abbildungen. Der Zulässigkeitsbereich X ist schließlich in der unteren rechten Abbildung dargestellt.

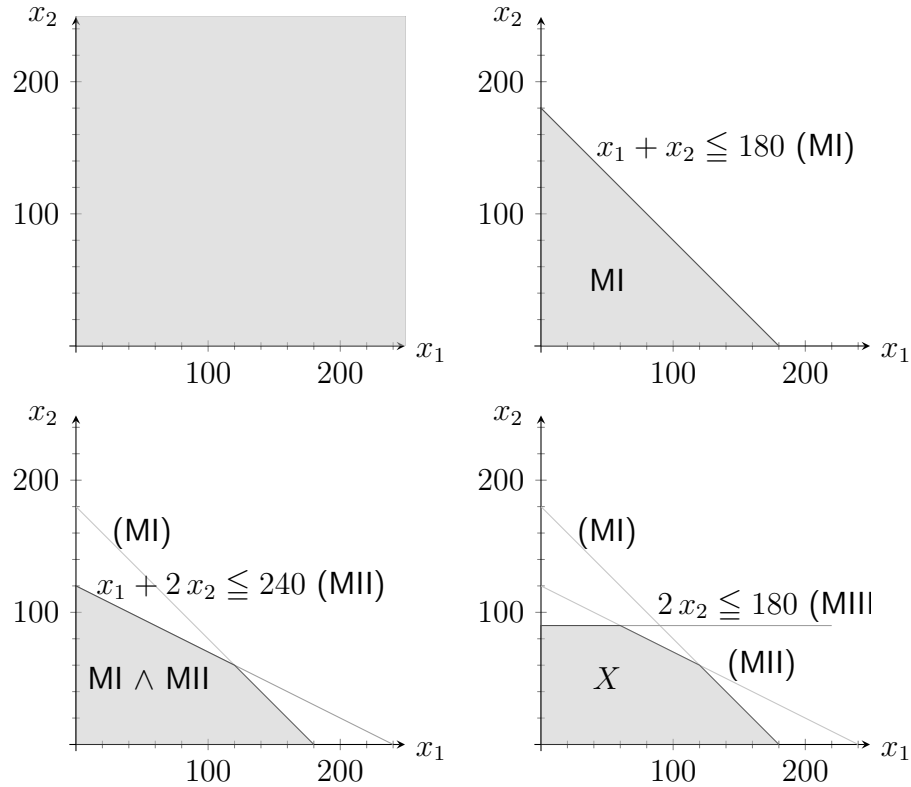


Abbildung 2.2: Nebenbedingungen des Zulässigkeitsbereichs X

Ergänzen Sie in der Abbildung 2.2 (rechts unten) die zusätzlichen Restriktion $x_1 \leq 200$. Was fällt Ihnen auf?

 L-25

Eine Nebenbedingung mit den Eigenschaften, wie beispielsweise die Restriktion $x_1 \leq 200$ in Abbildung 2.2 oder die Restriktion (3.) aus der Übungsaufgabe 2.4 aufweist, wird als *redundant* bezeichnet. Durch eine *redundante Nebenbedingung* i wird der Zulässigkeitsbereich X eines LPs nicht weiter eingeschränkt. D.h. für $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt:

$$X \cap \left\{ (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \right\} = X. \quad (2.9)$$

Wie Beispiel 2.5 zeigt, kann der Zulässigkeitsbereich für Probleme mit zwei Variablen anschaulich graphisch dargestellt werden. Bereits bei drei Variablen wird dieses allerdings wesentlich aufwendiger (vgl. X_b in Übungsaufgabe 2.5). In höherdimensionalen Beispielen ist die graphische Visualisierung deshalb meist nicht mehr möglich.

redundante
Nebenbedingung

5 Einführung in Differential- und Differenzengleichungen

Vorbemerkungen

Wenn sich eine Krankheit ungehindert ausbreitet, so wird häufig von einem exponentiellen Wachstum gesprochen. Die Ermittlung einer Funktion zur Bestimmung der Anzahl an erkrankten Personen zu jedem möglichen Zeitpunkt führt zur Theorie der Differentialgleichungen. Bei vielen ökonomischen Modellen sind Funktionen implizit in Form von Differential- oder Differenzengleichungen gegeben, insbesondere im Zusammenhang mit Produktions- und Nutzenfunktionen sowie Wachstums- und Marktprozessen. Dabei handelt es sich um Gleichungen, die eine Beziehung zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen oder zwischen einer Folge und ihren Differenzenfolgen darstellen. Gesucht sind somit die Funktionen bzw. Folgen, die diesen Gleichungen genügen.

In diesem Kapitel wird in die Theorie der Differential- und Differenzengleichungen eingeführt und ihre Anwendung in den Wirtschaftswissenschaften aufgezeigt. Weiterhin werden einige elementare Lösungsmethoden behandelt, die einen ersten allgemeinen Einblick vermitteln.

Differentialgleichungen dienen der Beschreibung stetiger ökonomischer Prozesse. Differenzengleichungen kommen hingegen bei diskreten Prozessen zur Anwendung, da ökonomische Größen häufig nur für konstante Zeitintervalle zur Verfügung stehen. Sobald bei Prozessen von der diskreten zur stetigen Betrachtungsweise gewechselt wird, gehen Differenzengleichungen in Differentialgleichungen über. Umgekehrt ergeben sich Differenzengleichungen durch die Diskretisierung von Differentialgleichungen. Der enge Zusammenhang von Differential- und Differenzengleichungen wird bereits an dieser Stelle deutlich und zeigt sich wiederholt in den Parallelen der Aufgabenstellungen und den Lösungsmethoden.

Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

Eine weitere elementare Lösungsmethode existiert für Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen. Diese DGLn lassen sich in separable DGLn überführen und schließlich mit der Methode „Trennung der Variablen“ lösen. Bezeichnet werden diese DGLn in der Literatur auch häufig als *homogene* Differentialgleichungen.

Definition 5.4.

Eine gewöhnliche DGL erster Ordnung heißt **Ähnlichkeitsdifferentialgleichung**, wenn sie sich in der Form

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{bzw.} \quad y'(x) = g\left(\frac{y(x)}{x}\right) \quad (5.14)$$

darstellen lässt. Dabei ist g eine auf einem Intervall definierte, stetige Funktion.

Um Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen zu lösen, erfolgt zuerst die Substitution

$$z(x) := \frac{y(x)}{x} \quad \text{bzw.} \quad y(x) = x \cdot z(x) \quad (5.15)$$

mit der entsprechenden Ableitung gemäß der Produktregel:

$$y'(x) = z(x) + x \cdot z'(x). \quad (5.16)$$

Grundlagen 5.7. (Produktregel) [G: 2.3.3]

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Im Folgenden wird zur besseren Übersichtlichkeit die Schreibweise ohne Argument verwendet, d.h. $y' = z + x \cdot z'$. Einsetzen von (5.15) und (5.16) in (5.14) ergibt die DGL $z + x \cdot z' = g(z)$.

Um die Lösungsmethode „Trennung der Variablen“ anwenden zu können, ist zunächst in Schritt T1) eine Substitution von $z = y/x$ notwendig, die dann in Schritt T5) wieder rückgängig gemacht werden muss (Resubstitution). Dieses Vorgehen wird im folgenden Beispiel veranschaulicht.

Beispiel 5.13

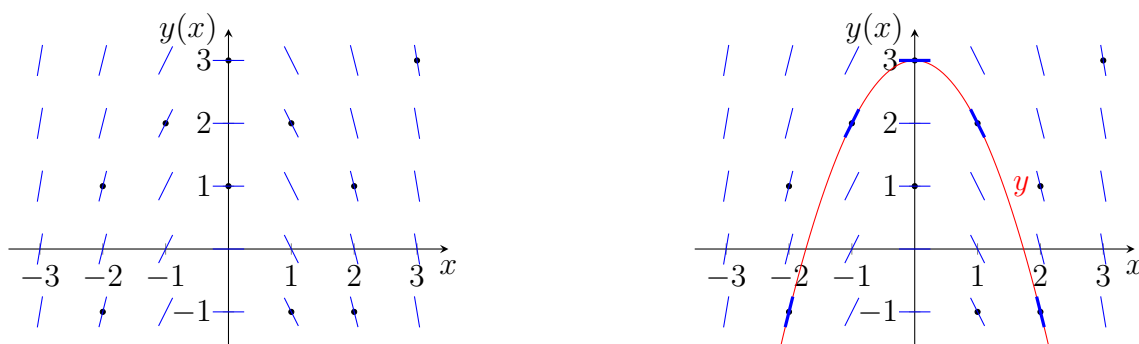
Gesucht sei die allgemeine Lösung der DGL $y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^3$.

*0) Typus: Ähnlichkeitsdifferentialgleichung mit $g\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^3$.

Lösungen zu den Übungen

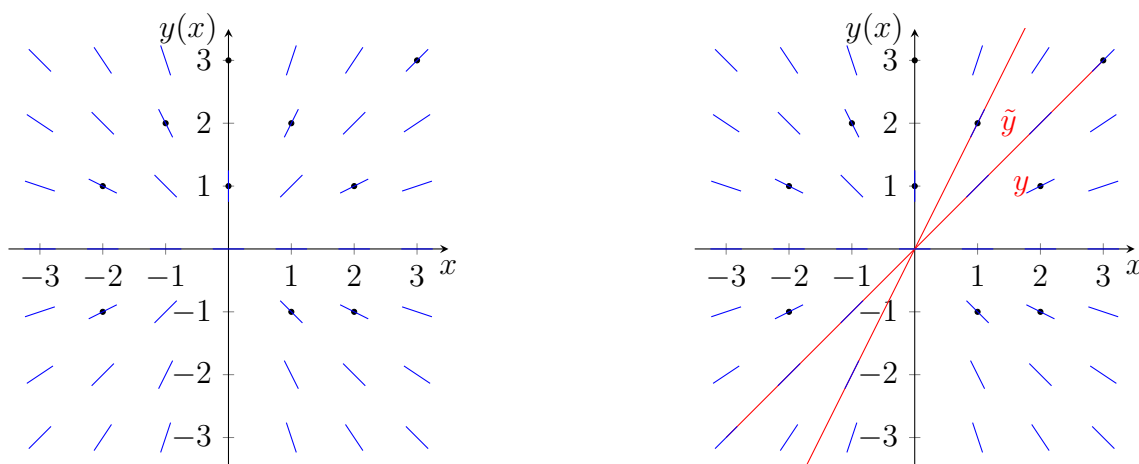
Lösung Übung 5.1 auf S. 180:

$(x, y(x))$	$(-2, -1)$	$(-2, 1)$	$(-1, 2)$	$(0, 1)$	$(0, 3)$
$y'(x) = -2 \cdot x$	4	4	2	0	0
$(x, y(x))$	$(1, -1)$	$(1, 2)$	$(2, 1)$	$(2, -1)$	$(3, 3)$
$y'(x) = -2 \cdot x$	-2	-2	-4	-4	-6



Richtungsfeld der expliziten DGL $y'(x) = -2 \cdot x$ mit Lösung $y(x) = 3 - x^2$

Lösung Übung 5.2 auf S. 180:



Richtungsfeld der expliziten DGL $y'(x) = \frac{y}{x}$ mit den Lösungen $y(x) = x$ und $\tilde{y}(x) = 2x$.

Aus dem Vergleich möglicher Lösungskurven folgt, dass die allgemeine Lösung die Form $y = c \cdot x$ mit $c \in \mathbb{R}$ besitzt.

Vertiefung der Statistik

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

gegeben, wobei die Stichproben(ko)varianzen durch

$$S(X, Y) = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (X_n - \bar{X})(Y_n - \bar{Y}) \quad (4.3)$$

$$S(X)^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (X_n - \bar{X})^2 = S(X, X) \quad (4.4)$$

$$S(Y)^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (Y_n - \bar{Y})^2 = S(Y, Y) \quad (4.5)$$

definiert sind.

Explizit kann man auch

**Korrelations-
koeffizient
(Stichprobe)**

$$R = \frac{\sum_{n=1}^N (X_n - \bar{X})(Y_n - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{n=1}^N (X_n - \bar{X})^2 \sum_{n=1}^N (Y_n - \bar{Y})^2}} \quad (4.6)$$

schreiben.

4.1.1 Signifikanztest $\rho = 0$

Bei bivariat normalverteilten Merkmalen (Abb. 4.1)

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x \sigma_y \rho \\ \sigma_x \sigma_y \rho & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \right). \quad (4.7)$$

ist unter

$$H_0 : \rho = 0 \quad (4.8)$$

$$H_1 : \rho \neq 0 \quad (4.9)$$

**Test des Korrelati-
onskoeffizienten**

die Teststatistik

$$T = \sqrt{N-2} \frac{R}{\sqrt{1-R^2}} \sim t(N-2). \quad (4.10)$$

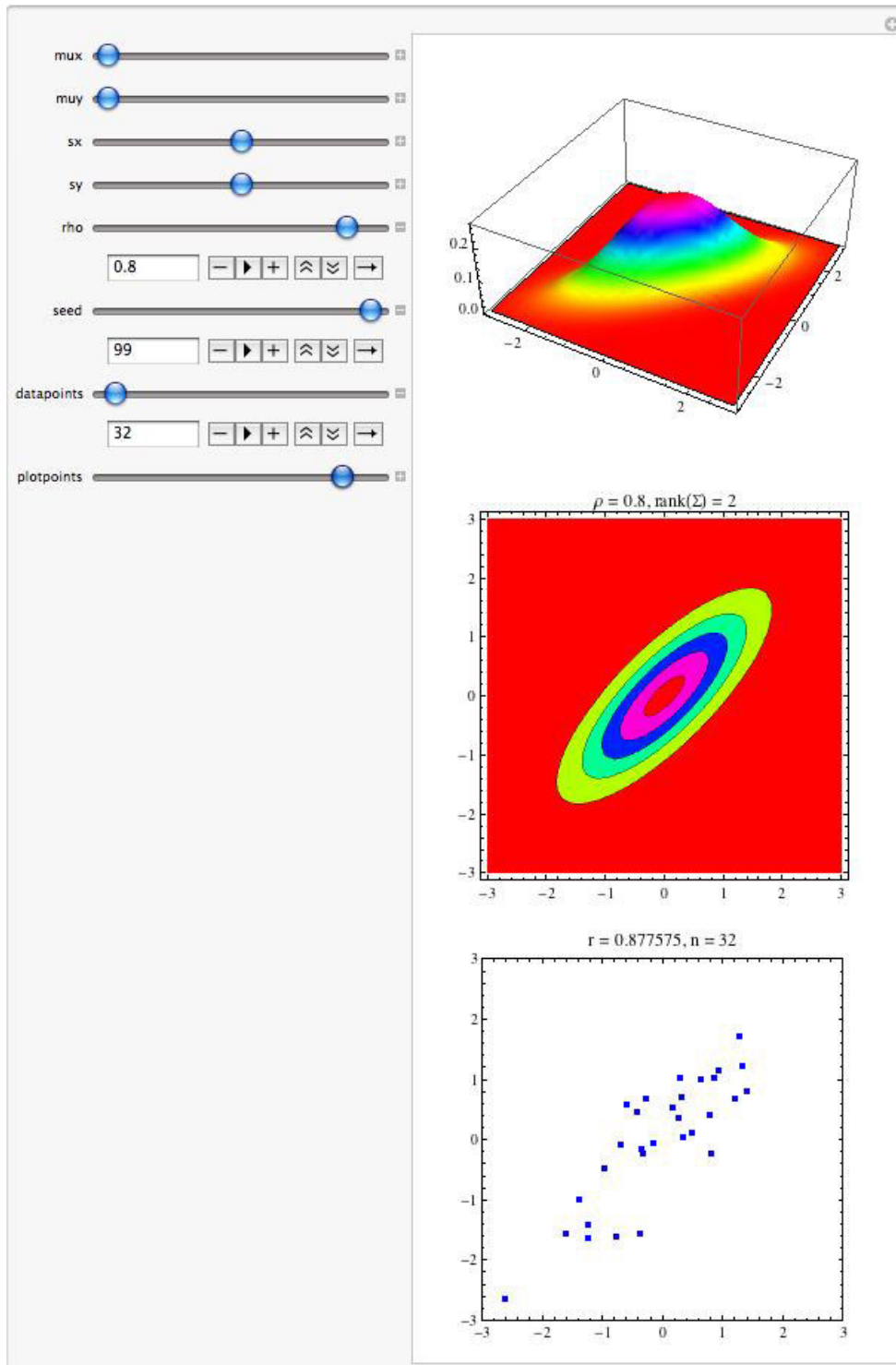


Abbildung 4.1: Bivariate Normalverteilung mit $\rho = 0.8$ und simulierten Daten (Streudiagramm; $r = .877$, $N = 32$, $seed = 99$).

Beispiel 5.3 (BIP 2007 und Inflationsrate (Konfidenzintervall))

Im Beispiel war

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= -0.827 \\ \hat{\beta} &= 0.601 \\ \hat{\sigma}^2 &= .774 \\ \hat{\sigma} &= \sqrt{.774} = .88 \\ \sum (x_n - \bar{x})^2 &= \sum x_n^2 - N\bar{x}^2 = 107.121.\end{aligned}$$

Daraus findet man den Streuungsterm

$$\begin{aligned}\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{E})} &= \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_n (x_n - \bar{x})^2}} \\ &= 0.88 \sqrt{\frac{1}{32} + \frac{(x - 5.5275)^2}{107.121}}.\end{aligned}$$

Das 95%-KI ist damit

$$(-0.827 + 0.601 x) \pm 1.7972 \sqrt{1/32 + 0.00934(-5.5275 + x)^2}$$

mit dem Quantil $t(.975, 30) = 2.04227$. An der Stelle $x = \bar{x} = 5.5275$ ergibt sich der minimale Wert

$$2.497 \pm 0.318.$$

Abb. 5.5 zeigt das Konfidenz-Intervall als Konfidenz-Band für alle x -Werte zwischen 0 und 11.



**5.3.2 Prognoseintervall für individuelles Y_0
(Fall 2)**

Der individuelle zufällige Wert $Y_0 = \alpha + \beta X_0 + \epsilon_0 = E[Y_0|X_0] + \epsilon_0$ kann mit Hilfe von $\hat{Y}_0 = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_0$ geschätzt werden. Der dabei zu erwartende quadrierte Prognose-Fehler ist (vgl. 5.91; alles folgende bedingt auf X_0)

$$E[Y_0 - \hat{Y}_0]^2 = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{N} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_n (X_n - \bar{X})^2} \right). \quad (5.95)$$

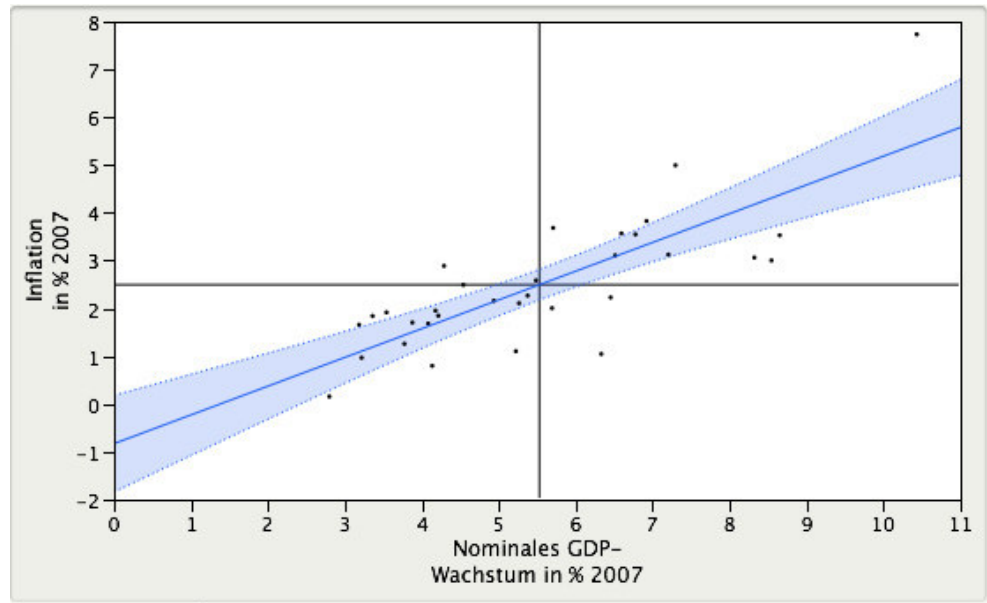


Abbildung 5.5: Geschätzte Gerade mit Konfidenzband $\hat{E}[Y|X] \pm t(1 - \alpha/2, N - 2)\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{E})}$.

Man erhält also im Vergleich zu Glg. 5.91 einen zusätzlichen Term σ^2 , der durch den Gleichungsfehler ϵ_0 im stochastischen $Y_0 = \alpha + \beta X_0 + \epsilon_0$ erzeugt wird.

Dies kann wie folgt gezeigt werden (bedingt auf X_0):

Da $E[Y_0] = \alpha + \beta X_0$ und $E[\hat{Y}_0] = \alpha + \beta X_0$ (Erwartungstreue der KQ-Schätzer) gilt

$$E[Y_0 - \hat{Y}_0]^2 = \text{Var}(Y_0 - \hat{Y}_0) = \text{Var}(Y_0) + \text{Var}(\hat{Y}_0). \quad (5.96)$$

Hierbei wurde $\text{Cov}(Y_0, \hat{Y}_0) = \text{Cov}(\alpha + \beta X_0 + \epsilon_0, \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_0) = 0$ ausgenutzt, da die KQ-Schätzer unabhängig vom Gleichungsfehler ϵ_0 sind. Außerdem gilt ganz allgemein für Zufallsvariablen $E[Z^2] = \text{Var}(Z)$ für $E[Z] = 0$.

Setzt man noch $\text{Var}(Y_0) = \sigma^2$ und $\text{Var}(\hat{Y}_0) = \sigma^2 \left(\frac{1}{N} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_n (X_n - \bar{X})^2} \right)$ (Fall 1) ein und ersetzt wieder $\sigma \rightarrow \hat{\sigma}$, so ergibt sich das gesuchte Prognoseintervall

Das F -Quantil $f(.95, 1, 30) = 4.17088$ ist wesentlich kleiner als die Teststatistik, sodaß die Nullhypothese verworfen wird. Dies stimmt mit dem Resultat des t -Tests überein (Bsp. 5.2). Die T -Statistik war 7.07611. Quadriert man diese, so ergibt sich $T^2 = 50.0713$, was mit der F -Statistik übereinstimmt. Dies ist kein Zufall, sondern folgt aus dem Zusammenhang $T(N - 2)^2 = N(0, 1)^2/\chi^2(N - 2) = F(1, N - 2)$ der T , χ^2 und F -Statistik (vgl. Abs. 1.3.4.2, Nummer 4).

■

Der F -Bruch läßt sich auch mit Hilfe des Korrelationskoeffizienten ausdrücken, da

$$\frac{SQE}{SQR/(N - 2)} = \frac{SQE}{SQT - SQE}(N - 2) \quad (5.122)$$

$$= \frac{SQE/SQT}{1 - SQE/SQT}(N - 2). \quad (5.123)$$

Somit gilt

$$F = \frac{R_{xy}^2}{1 - R_{xy}^2}(N - 2). \quad (5.124)$$

Große (betragsmäßige) Korrelationen führen also zu großen F -Statistiken.

Im Beispiel ist $r_{xy}^2 = 0.625$ und somit $F = \frac{0.625}{1 - 0.625}30 = 50.07$.

5.4.4 Residualanalyse

Diagnose

Nach dem Schätzen der Parameter und dem Testen des Modells sollte auch eine Analyse der Residuen vorgenommen werden (Diagnose). Hiermit wird überprüft, ob die Annahmen des Modells (vgl. Abs. 5.1.2.2) zumindest approximativ erfüllt sind oder ob grobe Abweichungen vorliegen.

Beispielsweise sollten die Residuen $\hat{\epsilon}_n$ unsystematisch streuen und keine Abhängigkeit von den Regressoren X_n aufweisen. Dies zeigt sich im Streudiagramm Abb. 5.7. Die eingezeichnete Regressionslinie hat nur eine sehr kleine Steigung. Man hat allerdings den Eindruck, daß für große

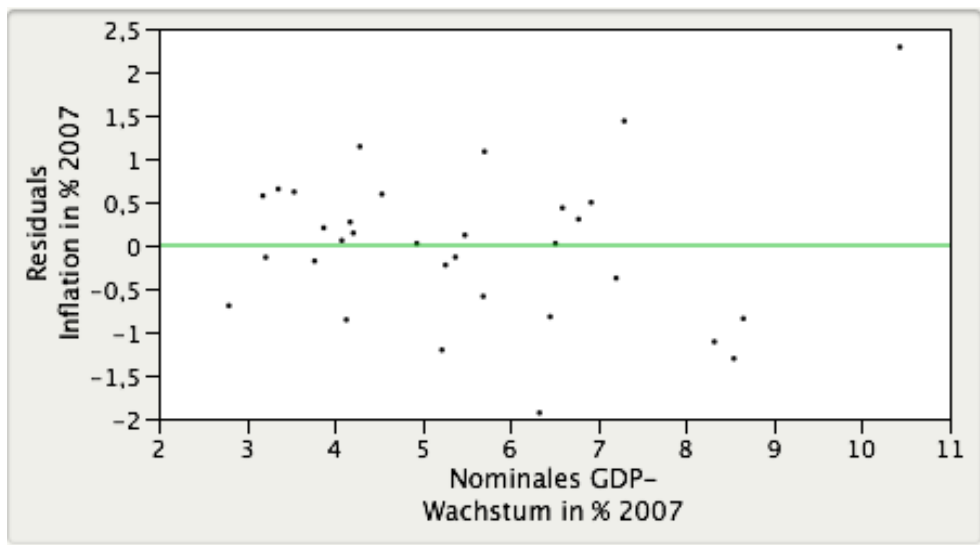


Abbildung 5.7: Streudiagramm der Residuen $\hat{\epsilon}_n$ mit den Regressoren X_n . Eingezeichnet ist auch eine geschätzte Regressionslinie.

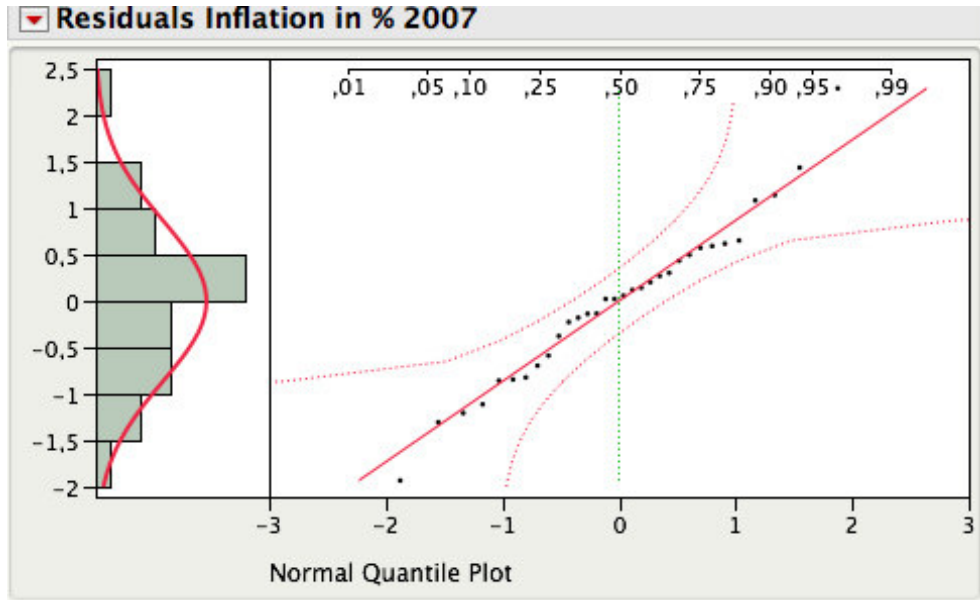


Abbildung 5.8: Histogramm und Normal-Quantil-Plot der Residuen $\hat{\epsilon}_n$. Es sind keine groben Abweichungen von der Normalverteilung zu erkennen.

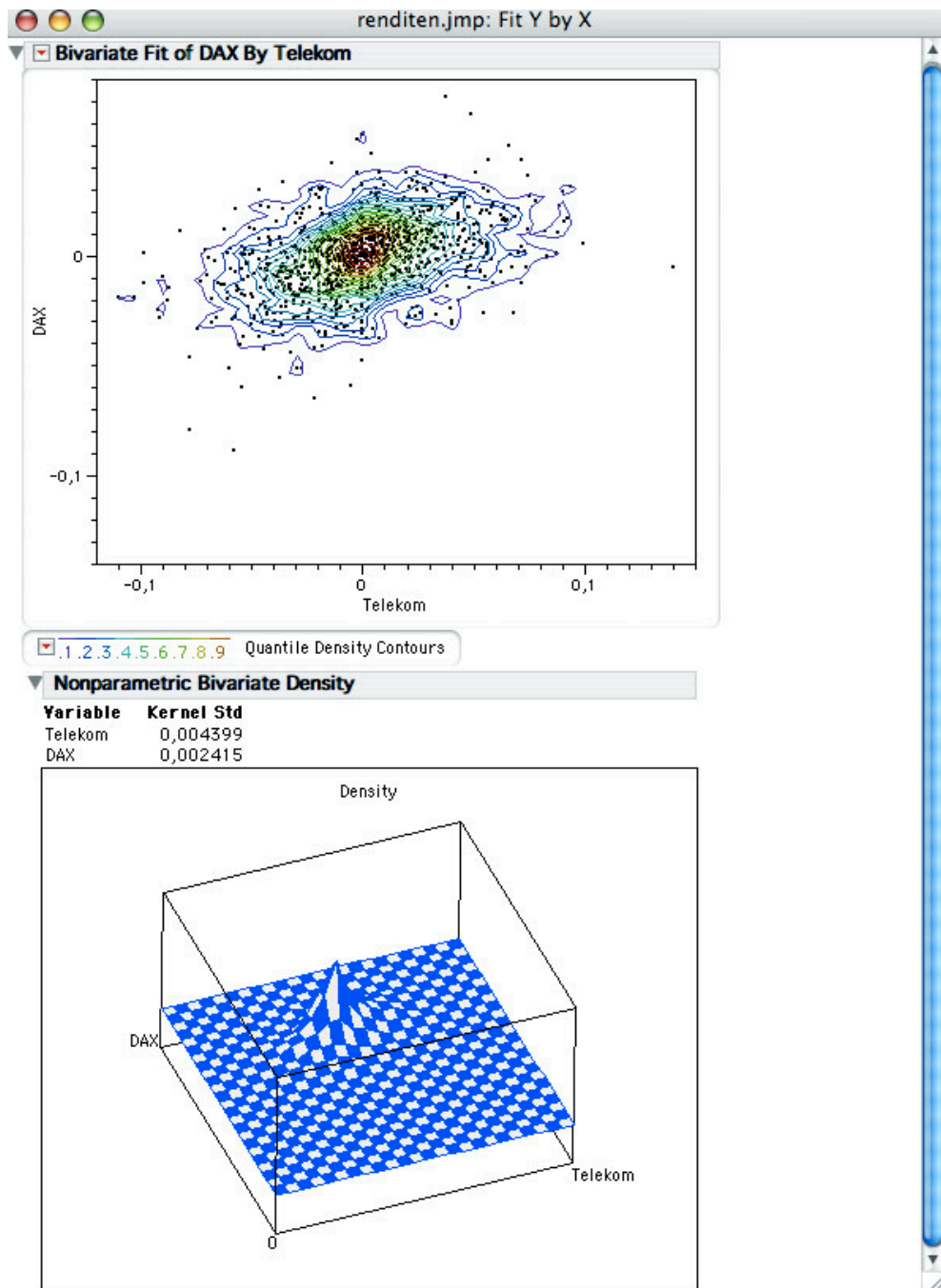


Abbildung 12.20: Streudiagramm, Dichte-Graphik (Höhenlinien) (oben) und 3-D-Darstellung der bivariaten empirischen Dichte (unten) von Dax und Telekom-Rendite (SAS/JMP).

$P = [\psi_1, \dots, \psi_p] : p \times p$, $M = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_p) : p \times p$ (Diagonalmatrix).

Die Summendarstellung von Σ wird als **Eigenwertzerlegung** oder **Spektral-Darstellung** bezeichnet. Man spricht auch von **Diagonalisierung** ($P'\Sigma P = M$).

**Eigenwert-
zerlegung**

Die Wichtigkeit dieser Formeln kann gar nicht überschätzt werden. Sie erlauben, eine Matrix als Überlagerung von Projektionen $\psi_i\psi_i'$ auf eindimensionale Unterräume darzustellen, mit den Eigenwerten (Spektrum) als Gewicht.

Ganz allgemein gilt für die Spur (= trace) der Matrix

Spur

$$\sum_i \sigma_{ii} := \text{tr}(\Sigma) = \sum_i \mu_i = \text{tr}(M), \quad (14.318)$$

da $\text{tr}(\Sigma) = \text{tr}(PMP') = \text{tr}(MP'P) = \text{tr}(M)$.

Übung: Beweisen Sie die zyklische Eigenschaft $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ der Spur.

Beispiel 14.9 (Eigenwerte einer Korrelationsmatrix)

Für die (theoretische) Korrelationsmatrix

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \quad (14.319)$$

ergeben sich die Eigenwerte aus

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \mu & \rho \\ \rho & 1 - \mu \end{pmatrix} = 0 = (1 - \mu)^2 - \rho^2 \quad (14.320)$$

$$\mu_{1,2} = 1 \pm \rho \quad (14.321)$$

Die Summe der Eigenwerte ist also $2 = \text{tr}(R) =$ Summe der Diagonale := Spur = trace. Ganz allgemein gilt

$$\sum_i R_{ii} := \text{tr}(R) = \sum_i \mu_i = p. \quad (14.322)$$

Die Eigenvektoren ergeben sich aus den Bedingungen

$$(R - \mu_1 I_2)\psi_1 = \begin{bmatrix} -\rho & \rho \\ \rho & -\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14.323)$$

$$(R - \mu_2 I_2)\psi_2 = \begin{bmatrix} \rho & \rho \\ \rho & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{21} \\ \psi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (14.324)$$

Etwa löst

$$\begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14.325)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_{21} \\ \psi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (14.326)$$

$$(14.327)$$

obige Gleichungen. Das Betrags-Quadrat der Vektoren ist $[1, 1][1, 1]' = 2$, $[1, -1][1, -1]' = 2$, sodaß man

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \end{bmatrix} = 1/\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14.328)$$

$$\psi_2 = \begin{bmatrix} \psi_{21} \\ \psi_{22} \end{bmatrix} = 1/\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (14.329)$$

als orthonormierte Eigenvektoren findet.

Übung: Zeigen Sie, daß ψ_1, ψ_2 orthonormiert sind.

Es ist wichtig, daß die Eigenvektoren gar nicht von der Korrelation ρ abhängen. Sie zeigen in Richtung der Winkelhalbierenden der Quadranten. Abb. 14.29 zeigt simulierte Daten aus einer bivariaten Normalverteilung

$$N\left(0, R = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix}\right). \quad (14.330)$$

Die Eigenwerte von R sind $1 \pm 0.9 = 1.9, 0.1$ und die orthogonale Matrix der Eigenvektoren lautet

$$P = 2^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (14.331)$$

$$PP' = P'P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2. \quad (14.332)$$

Im gedrehten Koordinatensystem gilt daher

$$\mathbf{y} = P'\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \psi'_1 \mathbf{x} \\ \psi'_2 \mathbf{x} \end{bmatrix} = 2^{-1/2} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} \quad (14.333)$$

und $\text{Cov}(\mathbf{y}) = P'RP = M = \text{diag}(1.9, 0.1)$.

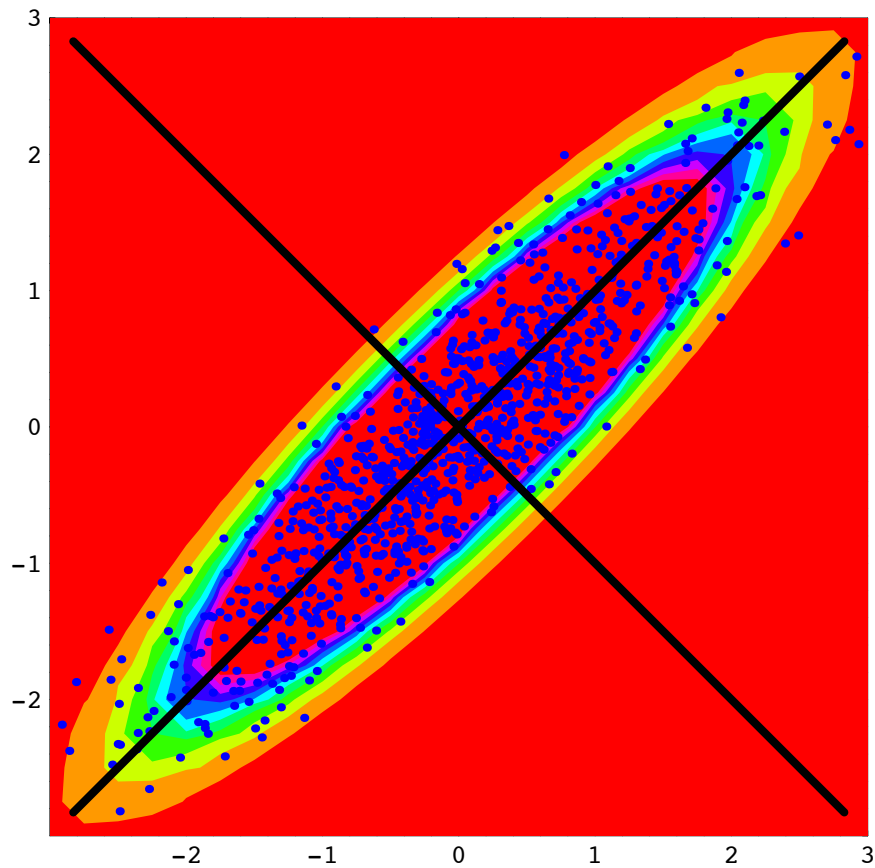


Abbildung 14.29: Simulierte normalverteilte Daten $\mathbf{x}_n, n = 1, \dots, N = 1000$ mit Kovarianz-Matrix $R = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix}$. Die Hauptachsen zeigen in Richtung der Winkelhalbierenden.

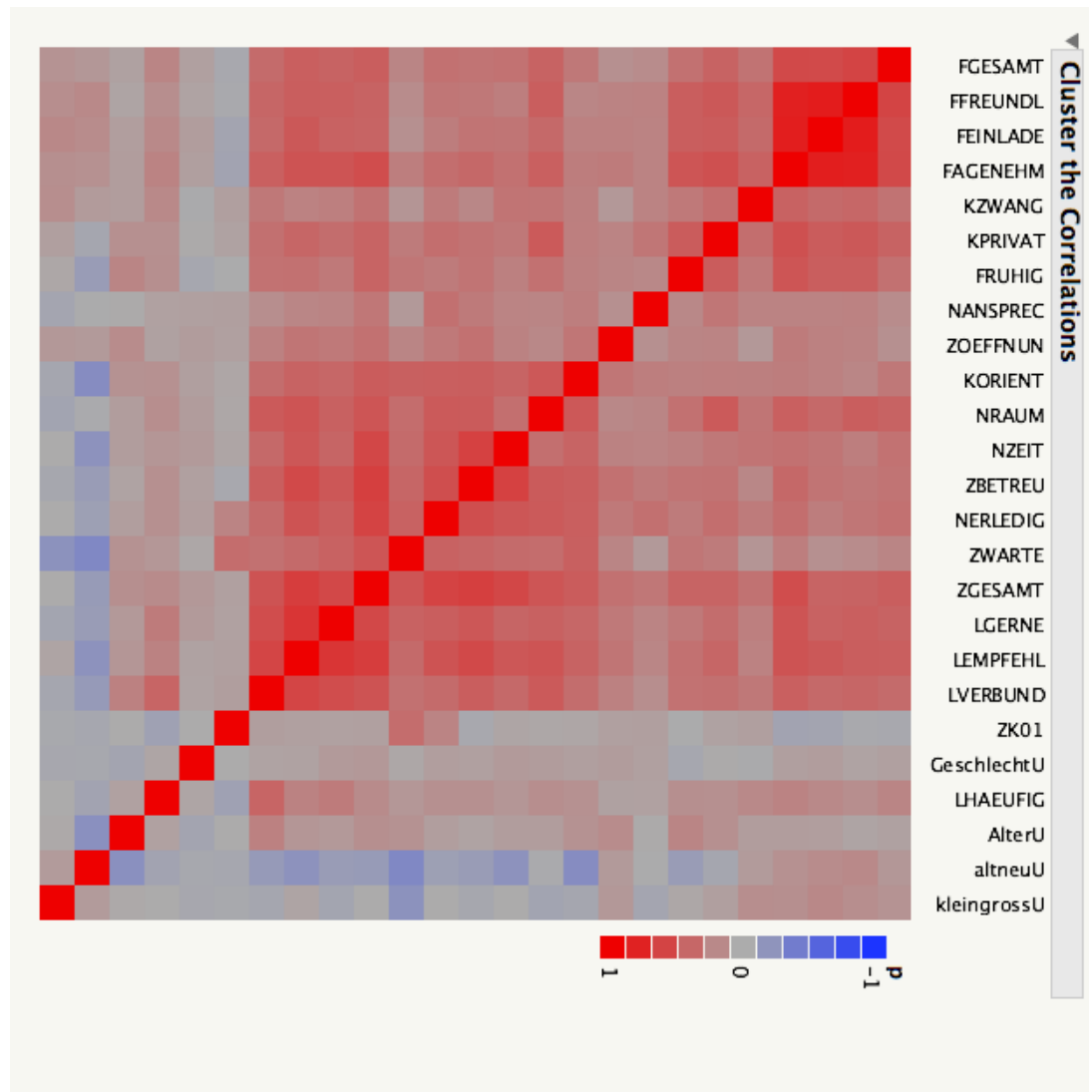


Abbildung 15.12: JMP: Korrelationsmatrix aller Variablen (Cluster der Korrelationen). Die Stärke der Korrelation ist durch die Farbe markiert (rot: $r > 0$, blau: $r < 0$). Die items der Konstrukte bilden einen positiv korrelierten Block.